Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
8.12.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 8. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1:

(a) Wir definieren die Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := x - g(x)$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig. Wegen $g([a, b]) \subset [a, b]$ gilt $h(a) = a - g(a) \leq a - a = 0$ und $h(b) = b - g(b) \geq b - b = 0$. Daher liegt $y_0 := 0$ zwischen den Funktionswerten $h(a)$ und $h(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es (mind.) ein $x_0 \in [a, b]$ mit $h(x_0) = 0$, d.h. $g(x_0) = x_0$. (Solch ein x_0 heißt *Fixpunkt* von g.)
Bemerkung: Die Aussage ist i.a. falsch, wenn man $[a, b]$ durch das offene Intervall (a, b) ersetzt. Beispielsweise besitzt die Funktion $g\colon (0, 1) \to (0, 1)$, $g(x) := \frac{1}{2}x$, in $(0, 1)$ keinen Fixpunkt, denn aus $g(x) = x$ folgt $x = 0 \notin (0, 1)$.

(b) Auf dem Intervall $[0, 2]$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Zudem ist für $x \geq 0$ offenbar $f(x) \geq 0$ und $f(x) = \frac{x+3-1}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3} \leq 1$. Deshalb gilt für die stetige Funktion $f : [0, 2] \to [0, 2]$ gemäß (a): Es gibt (mindestens) ein $x_0 \in [0, 2]$ mit $f(x_0) = x_0$.

(c) Wir verifizieren zunächst, dass die Funktion $f : [0, 2] \to [0, 2]$ monoton wachsend ist. Für alle $x, y \in [0, 2]$ gilt nämlich

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x+3} \geq \frac{1}{y+3} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{x+3} \leq 1 - \frac{1}{y+3} \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y)\,.$$

Nun zeigen wir, dass die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, definiert durch $y_0 \in [0, 2]$ und $y_n := f(y_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$, monoton ist. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall $y_0 \leq f(y_0)$: Die Folge (y_n) ist monoton wachsend, d.h. $y_{n-1} \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Denn:
IA: $n = 1$. Es ist $y_0 \leq f(y_0) = y_1$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $y_{n-1} \leq y_n$ (IV). Da f monoton wachsend ist, folgt

$$y_n = f(y_{n-1}) \overset{\text{(IV)}}{\leq} f(y_n) = y_{n+1}.$$

Fall $y_0 > f(y_0)$: Die Folge (y_n) ist monoton fallend, d.h. $y_{n-1} \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dies kann man ähnlich wie eben durch vollständige Induktion beweisen.

Außerdem gilt $y_0 \in [0, 2]$ und $y_n = f(y_{n-1}) \in [0, 2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist (y_n) beschränkt. Die beschränkte und monotone Folge $(y_n)_{n\in\cup\{0\}}$ konvergiert nach Monotoniekriterium.
Bemerkung: Macht man in der Rekursionsformel $y_n = f(y_{n-1})$ den Grenzübergang $n \to \infty$ (und beachtet dabei die Stetigkeit von f), so ergibt sich für den Grenzwert a der Folge (y_n) die Gleichung

$$a = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(y_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} y_{n-1}) = f(a),$$

d.h. a ist Fixpunkt von f. Rechnen wir a aus: Es gilt $a = \frac{a+2}{a+3}$. Nach Multiplikation mit $a+3$ erhält man die quadratische Gleichung $a^2+2a-2 = 0$ in a, die genau für $a = -1+\sqrt{3}$ oder $a = -1 - \sqrt{3}$ erfüllt ist. Wegen $y_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ muss $a \geq 0$ gelten, also $a = -1 + \sqrt{3}$.

Aufgabe 2:

(a) Wir berechnen zunächst

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\ldots)-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\ldots}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{1+\frac{y}{2!}+\frac{y^2}{3!}+\frac{y^3}{4!}+\ldots}{1}=1$$

(Die letzte Gleichheit gilt aufgrund der Stetigkeit von Potenzreihen). Für jedes $a\in\mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=\lim_{x\to a}e^a\,\frac{e^{x-a}-1}{x-a}\overset{y=x-a}{=}\lim_{y\to 0}e^a\,\frac{e^y-1}{y}=e^a\cdot 1=e^a.$$

(b) Zunächst zeigen wir $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Hierzu betrachten wir die Reihenentwicklung des Sinus

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\ldots}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+-\ldots\xrightarrow{x\to 0}1.$$

Aus $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ folgt insbesondere $\sin x\neq 0$ in der Nähe von $x_0=0$. Für jede Folge (x_n) mit $x_n\to 0$ und $x_n\neq 0$ hat man also $\sin x_n\to 0$ und $\sin x_n\neq 0$ für fast alle n. Daher folgt mit $\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$

$$\frac{e^{\sin x_n}-1}{\sin x_n}\xrightarrow{n\to\infty}1\,,\qquad\text{also}\qquad\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\xrightarrow{x\to 0}1.$$

Nach den Grenzwertsätzen existiert der zu untersuchende Grenzwert und es gilt

$$1=\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}.$$

(c) Wir betrachten die Potenzreihen der vorkommenden Funktionen

$$\frac{\sinh x-\sin x}{x(\cosh x-1)}=\frac{(x+\frac{1}{3!}x^3+\cdots)-(x-\frac{1}{3!}x^3+-\cdots)}{x((1+\frac{1}{2!}x^2+\cdots)-1)}=\frac{\frac{2}{3!}x^3+\cdots}{\frac{1}{2!}x^3+\ldots}\xrightarrow{x\to 0}\frac{2\cdot 2!}{3!}=\frac{2}{3}.$$

Aufgabe 3:

(a) Für $t\in(-1,1)\setminus\{0\}$ setze $y:=\ln(1+t)$. Dann ist $t=e^y-1$ und wegen $\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$ (vgl. Aufgabe 2 (a) mit $a=0$) folgt

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{e^y-1}{y}}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}=1.$$

(b) Für $x=0$ ist die Aussage klar, weil dann auf der linken und rechten Seite der Gleichung 1 steht. Sei $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ fest. Da $(\frac{x}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, liefert Teil (a)

$$1=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x/n)}{x/n}\,.$$

Deshalb ergibt sich unter Verwendung der Stetigkeit des Logarithmus

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x}\ln\big(1+\tfrac{x}{n}\big)=\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\Big(\ln\big(1+\tfrac{x}{n}\big)^n\Big)=\frac{1}{x}\ln\Big(\lim_{n\to\infty}\big(1+\tfrac{x}{n}\big)^n\Big)$$
$$\Leftrightarrow\quad x=\ln\Big(\lim_{n\to\infty}\big(1+\tfrac{x}{n}\big)^n\Big)\quad\Leftrightarrow\quad e^x=\lim_{n\to\infty}\big(1+\tfrac{x}{n}\big)^n\,.$$

Aufgabe 4: Zunächst werden z und w in Polarkoordinaten dargestellt. Für die Beträge gilt:

$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2, \quad |w| = \sqrt{4^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = 8$$

Für die Argumenten gilt nach Abschnitt 10.6 der Vorlesung $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Re}(w) > 0)$:

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad \arg(w) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Es folgt damit:

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad w = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$$

(a) $\displaystyle \frac{1}{z} = \frac{1}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

(b) $\displaystyle \left(\frac{1}{z}\right)^{13} = \left(\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{13} = \left(\frac{1}{2}\right)^{13} e^{-i\frac{13}{6}\pi} = \frac{1}{8192}e^{i\pi(2-\frac{13}{6})} = \frac{1}{8192}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

(c) Es gibt 3 verschiedene dritte Wurzeln von w:

$$\begin{aligned}
w_1 &= \sqrt[3]{|w|}e^{i\frac{\arg(w)}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{9}}, \\
w_2 &= \sqrt[3]{|w|}e^{i\frac{\arg(w)+2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{7\pi}{9}}, \\
w_3 &= \sqrt[3]{|w|}e^{i\frac{\arg(w)+4\pi}{3}} = 2e^{i\frac{13\pi}{9}}
\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle \frac{w^7}{z^{13}} = \frac{\left(8e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^7}{\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{13}} = \frac{2^{21}e^{i\frac{7\pi}{3}}}{2^{13}e^{i\frac{13\pi}{6}}} = 2^8\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = 256e^{i\frac{\pi}{6}}$