Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
16.12.2015

Höhere Mathematik I

für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 9. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1:

(a) Mit $h(x) = x-2$ und $g(x) = \sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}} = (x-1)^{\frac{5}{2}}(x-3)^{\frac{11}{2}}$ gilt für $x \in (3,\infty)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{h}{g}\right)'(x) \overset{\text{Abschnitt 11.2}}{=} \frac{h'(x)g(x)-h(x)g'(x)}{g^2(x)} \\ &= \frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}(x-3)^{\frac{11}{2}} - (x-2)\left(\frac{5}{2}(x-1)^{\frac{3}{2}}(x-3)^{\frac{11}{2}} + \frac{11}{2}(x-1)^{\frac{5}{2}}(x-3)^{\frac{9}{2}}\right)}{(x-1)^5(x-3)^{11}} \\ &= -\frac{7x^2-25x+23}{(x-1)(x-3)\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}. \end{aligned}$$

(b) Setzt man $g(x) := x^x = e^{x\ln x}$, so ist $f(x) = x^{g(x)} = e^{g(x)\ln x}$ für jedes $x > 0$. Anwenden von Ketten- und Produktregel (vgl. Abschnitte 11.2 & 11.3) liefert zunächst

$$g'(x) = e^{x\ln x}(x\ln x)' = x^x(1\cdot\ln x + x\cdot x^{-1}) = (1+\ln x)x^x \qquad \text{für jedes } x>0$$

und dann die Differenzierbarkeit von f auf $(0,\infty)$ mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{g(x)\ln x}\big(g(x)\ln x\big)' \\ &= x^{(x^x)}\big(g'(x)\ln x + g(x)x^{-1}\big) = x^{(x^x)}\big((1+\ln x)x^x\ln x + x^{x-1}\big). \end{aligned}$$

(c) Wegen $f(x) = (x^x)^x = x^{x\cdot x} = e^{x^2\ln x}$ liefert die Produkt- und Kettenregel (vgl. Abschnitte 11.2 & 11.3) die Differenzierbarkeit von f auf $(0,\infty)$ mit

$$f'(x) = e^{x^2\ln x}\big(2x\ln x + x^2\tfrac{1}{x}\big) = x^{(x^2)}x\big(2\ln x+1\big) = x^{x^2+1}\big(2\ln x+1\big).$$

Aufgabe 2:

(a) Die Funktion $f\colon (0,\infty)\to\mathbb{R},\ x\mapsto \frac{\ln x}{x}$ ist auf $(0,\infty)$ differenzierbar. Um das Monotonieverhalten von f zu untersuchen, betrachten wir f'. Für jedes $x>0$ gilt (vgl. Abschnitt 11.2)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (\ln x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} \quad \begin{cases} >0 & \text{für } x<e, \\ <0 & \text{für } x>e. \end{cases}$$

Somit ist f auf $\begin{cases} (0,e) \\ (e,\infty) \end{cases}$ streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$. Für $x,y\in(0,\infty)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x^y > y^x \quad &\iff \quad e^{y\cdot\ln(x)} > e^{x\cdot\ln(y)} \quad \overset{\text{Exp.fkt. streng mon. wachsend}}{\iff} \quad y\cdot\ln(x) > x\cdot\ln(y) \\ &\iff \quad \frac{\ln(x)}{x} > \frac{\ln(y)}{y} \quad \iff \quad f(x) > f(y). \end{aligned}$$

Da $\pi > e$ und f auf (e,∞) streng monoton fallend ist, folgt $f(\pi) < f(e)$. Deshalb liefert obige Äquivalenzkette $e^\pi > \pi^e$.

(b) Seien $0 < y < x$. Betrachte die Funktion $f\colon [y^2, x^2] \to \mathbb{R}$, $u \mapsto e^u$. Da f auf $[y^2, x^2]$ stetig und auf (y^2, x^2) differenzierbar ist, erfüllt f die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes (vgl. Abschnitt 11.7). Danach existiert ein $\xi \in (y^2, x^2)$ mit

$$e^{x^2} - e^{y^2} = f(x^2) - f(y^2) = (x^2 - y^2)f'(\xi) = \underbrace{(x-y)(x+y)}_{\geq 0} e^{\xi} \leq (x-y)(x+y)e^{x^2}$$

wegen der Monotonie der (reellen) Exponentialfunktion.

Aufgabe 3: Klar ist: für alle $x < 0$ ist f differenzierbar in x und es gilt $f'(x) = 0$. Mit den bereits zitierten Rechenregeln gilt für alle $x > 0$, dass f differenzierbar in x ist und

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{x^2}} + 2\frac{1}{x^3}x^{\frac{5}{2}}e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{x^2}}\left[\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right] = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x}}\left[\frac{5}{2}x^2 + 2\right].$$

Bei $x = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0+} \frac{h^{\frac{5}{2}}e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{h\to 0+} h^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{h^2}} = \underbrace{\left(\lim_{h\to 0+} h^{\frac{3}{2}}\right)}_{=0} \cdot \left(\lim_{h\to 0+} e^{-\frac{1}{h^2}}\right) \\
&= 0 \cdot \lim_{h\to\infty} e^{-h^2} = 0 \cdot \lim_{h\to\infty} \frac{1}{e^{(h^2)}} = 0 \cdot \underbrace{\lim_{h\to\infty} \frac{1}{e^h}}_{\frac{1}{\infty}=0} = 0
\end{aligned}$$

sowie

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{0-0}{h} = 0$$

also

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0.$$

Aufgabe 4:

(a) Die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) = \sin(\sin(x)) \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = x - \pi$$

sind differenzierbar und es gilt $\lim\limits_{x\to\pi} f_1(x) = \lim\limits_{x\to\pi} f_2(x) = 0$. Ferner ist $f_1'(x) = \cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)$ und $f_2'(x) = 1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich gilt nach der Regel von l'Hospital (vgl. Abschnitt 11.9):

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(\sin(x))}{x - \pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)}{1} = -1.$$

(b) Die Funktionen $f_1, f_2 : (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) = \ln(\cos(3x)) \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = \ln(\cos(2x))$$

sind differenzierbar und es gilt $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 0$. Ferner ist $f_1'(x) = \frac{-3\sin(3x)}{\cos(3x)} = -3\tan(3x)$ und $f_2'(x) = \frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)} = -2\tan(2x)$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$. Für alle $x \neq 0$ gilt $f_2'(x) \neq 0$. Folglich gilt nach der Regel von l'Hospital (vgl. Abschnitt 11.9):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} = \lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-3\tan(3x)}{-2\tan(2x)} = \frac{3}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{\tan(2x)}.$$

Nun sind die Funktionen $g_1, g_2 : (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_1(x) = \tan(3x) \qquad \text{und} \qquad g_2(x) = \tan(2x)$$

differenzierbar und es gilt $\lim_{x\to 0} g_1(x) = \lim_{x\to 0} g_2(x) = 0$. Ferner ist $g_1'(x) = 3(1 + \tan^2(3x))$ und $g_2'(x) = 2(1+\tan(2x))$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$. Für alle $x \neq 0$ gilt $g_2'(x) \neq 0$. Folglich gilt nach der Regel von l'Hospital (vgl. Abschnitt 11.9):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{\tan(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{g_1'(x)}{g_2'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3(1+\tan^2(3x))}{2(1+\tan^2(2x))} = \frac{3}{2}.$$

Es ergibt sich insgesamt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} = \frac{9}{4}.$$

(c) Sei $x \geq 1$. Dann ist ln auf $[x, 1+\sqrt{1+x^2}]$ stetig und auf $(x, 1+\sqrt{1+x^2})$ differenzierbar. Nach dem Mittelwert der Differentialrechnung (MWS) (vgl. Abschnitt 11.7) existiert dann ein $\xi_x \in (x, 1+\sqrt{1+x^2})$ mit:

$$\begin{aligned} x\left(\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln(x)\right) &= \frac{x}{\xi_x}\left(1+\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{x}{\xi_x}\left(1+\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2}\right) \\ &= \frac{x}{\xi_x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right). \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}} = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{x}{\xi_x} \leq \frac{x}{x} = 1 \quad \text{wegen} \quad x < \xi_x < 1+\sqrt{1+x^2}.$$

Da $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}} = 1$ folgt $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x} = 1$ als Folgerung aus dem Einschnürungssatz. Deshalb ist

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} x\left(\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln(x)\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right) \\ &= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right)\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$