Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
30.01.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Übungsklausur

Aufgabe 1: (2 + 3 + 5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Ungleichung gilt:

$$2^{n-1} \leq n!.$$

(b) Untersuchen Sie, ob der folgende Grenzwert existiert. Berechnen Sie diesen gegebenenfalls:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

(c) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{4^n \ln(n)}.$$

Aufgabe 2: (4 + (3 + 3) Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von

$$f(x) = \frac{(2-x)^2}{3-x}, \qquad x < 3.$$

Geben Sie an, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt.

(b) Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ a & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, so dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist. Berechnen Sie $f'(x)$ für alle solche x.

Aufgabe 3: ((3 + 4) + 3 Punkte)

(a) Sei $f : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^2 e^{2x}$ definiert.

(i) Ermitteln Sie $f^{(20)}(0)$.

(ii) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, 0)$ und zeigen Sie, dass

$$0 \leq f(x) - T_2(f,0)(x) < 2, \qquad \forall x \in [0, \tfrac{1}{2}].$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $\alpha \in (0,1), \beta > 0$ die Gleichung

$$x = \alpha \cos(x) + \beta$$

mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ hat.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 4: (4 + 2 + (2 + 2) Punkte)

(a) Untersuchen Sie, ob der folgende Grenzwert existiert. Berechnen Sie diesen gegebenenfalls:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln\big(\sin(\alpha x)\big)}{\ln\big(\sin(x)\big)}, \qquad \alpha > 0.$$

(b) Bestimmen Sie den Wert des folgenden Integrals:

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx.$$

(c) Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integrale auf Konvergenz:

(i) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,dx$,

(ii) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{2+\sin(x)}{x}\,dx$.

Hinweise für nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den **09.02.2015**, im Sekretariat (Zimmer 2.029, Kollegiengebäude Mathematik (20.30)) abgeholt werden.
Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, den **11.02.2015**, von 13:00 bis 14:00 Uhr im Zimmer 2.067 (Kollegiengebäude Mathematik (20.30)) möglich.