Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
30.01.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Übungsklausur
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1:

(a) Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Wegen

$$2^{1-1} = 2^0 = 1 \qquad \text{und} \qquad 1! = 1$$

ist

$$2^{n-1} \leq n!$$

für $n = 1$ richtig.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n gelte $2^{n-1} \leq n!$ (IV). Dann folgt

$$2^{(n+1)-1} = 2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \overset{\text{(IV)}}{\leq} 2n! \leq (n+1) \cdot n! = (n+1)!.$$

Folglich gilt $2^{n-1} \leq n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $a_n := \frac{2^n}{n!}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \geq 0$ und

$$a_n = \frac{2^n}{n!} = 4 \cdot \frac{2^{n-2}}{n!} \overset{\text{(a)}}{\leq} 4 \cdot \frac{(n-1)!}{n!} = \underbrace{\frac{4}{n}}_{=:c_n}.$$

Da $c_n \to 0$ als $n \to \infty$, folgt mit dem Grenzwertsatz 6.3, dass $a_n \to 0$ als $n \to \infty$.
Alternative Lösung:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 2}{n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \underbrace{\frac{2}{n-1} \cdots \frac{2}{2}}_{\leq 1} \cdot \frac{2}{1}$$

$$\leq 4 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 4 \cdot 0 = 0.$$

(c) Sei $a_n := \frac{(-1)^n}{4^n \ln(n)}\ \forall n \geq 2$. Da $a_n \neq 0\ \forall n \geq 2$, können wir versuchen, den Konvergenzradius R der gegebenen Potenzreihe mit Hilfe des Satzes 7.15 (Folgerung aus dem Quotientenkriterium) zu bestimmen. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \ln(n)}{4^{n+1} \ln(n+1)} = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{4}.$$

Folglich ist $R = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4$, d.h. die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| < 4 \Leftrightarrow x \in (-2, 6)$.
Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x = -2$ gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{4^n \ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(-4)^n}{4^n \ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}.$$

Da $\frac{1}{\ln(n)} \geq \frac{1}{n} > 0$, $\forall n \geq 2$ und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, divergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$.
Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x = 6$ gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-2)^n}{4^n \ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{(4)^n}{4^n \ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln(n)}.$$

Da $\frac{1}{\ln(n)}$ eine monoton fallende Folge mit $\frac{1}{\ln(n)} \to 0$ als $n \to \infty$, folgt mit dem Leibnizkriterium, dass die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln(n)}$ konvergiert.
Insgesamt konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-2)^n}{4^n \ln(n)}$ für alle $x \in (-2, 6]$.

Aufgabe 2:

(a) Für $x \in D := (-\infty, 3)$ gilt

$$f'(x) = \frac{(2-x)(x-4)}{(3-x)^2}.$$

Nach Abschnitt 11.13 erfüllt ein lokales Extremum die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$. Daher kommt nur der Punkt $x_1^* = 2 \in D$ (der Punkt $x_2^* = 4 \notin D$) als lokales Extremum in Frage. Die zweite Ableitung von f ist

$$f''(x) = \frac{2}{(3-x)^3}.$$

Da $f(x_1^*) = 2 > 0$, besitzt f in x_1^* ein Minumum. Der Funktionswert an diesem Stelle ist

$$f(2) = 0.$$

(b) (i) Da f für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig ist, reicht es $f(0) = a$ so zu wählen, dass $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a$ gilt. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$0 \leq \underbrace{|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)|}_{=|f(x)|} \leq |x| \to 0, \qquad x \to 0.$$

Folglich gilt auch $f(x) \to 0\,(x \to 0)$ und somit muss $a = 0$ gewählt werden.

(ii) Klar ist: für alle $x \neq 0$ ist differenzierbar in x und es gilt

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wir zeigen zunächst, dass f in $x = 0$ nicht differenzierbar ist.
Annahme: f ist in $x = 0$ differenzierbar. Nach Abschnitt 11.1 ist dann f in $x = 0$ stetig, d.h. $a = 0$ muss gelten. Da aber der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

existiert nicht, ist f in $x = 0$ nicht differenzierbar.

Aufgabe 3:

(a) (i) Mit der aus der Vorlesung bekannten Reihenentwicklung von e^y, $y \in \mathbb{R}$, erhalten wir

$$f(x) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^{k+2} \overset{m=k+2}{=} \sum_{m=2}^{\infty} \underbrace{\frac{2^{m-2}}{(m-2)!}}_{=:a_m} x^m.$$

Nach der Bemerking in Abschnitt 11.14 ergibt sich

$$f^{(20)}(0) = 20! \cdot a_{20} = 20! \cdot \frac{2^{18}}{18!} = 95 \cdot 2^{20}.$$

(ii) Für $f(x) = x^2 e^{2x}$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{2x}(2x^2 + 2x), \\ f''(x) &= e^{2x}(4x^2 + 8x + 2), \\ f'''(x) &= e^{2x}(8x^2 + 24x + 12) \end{aligned}$$

und für das Taylorpolynom $T_2(f, 0)$ ergibt sich

$$T_2(f, 0)(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 = x^2.$$

Um die Abschätzung $0 < f(x) - T_2(f, 0) < 2$ zu zeigen, verwenden wir den Satz von Taylor. Dieser besagt, dass es ein ξ zwischen 0 und x, gibt mit

$$f(x) = T_2(f, 0)(x) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} x^3,$$

also mit

$$f(x) - T_2(f, 0)(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} x^3.$$

Somit reicht es, die Abschätzung $0 \leq \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} x^3 < 2$ für $x \in [0, \frac{1}{2}], \xi \in (0, \frac{1}{2})$ einzusehen. Diese ist erfüllt, denn:

$$\begin{aligned} \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} x^3 &= \frac{1}{3!} e^{2\xi}(8\xi^2 + 24\xi + 12)x^3 \geq 0, \\ \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} x^3 &= \frac{1}{3!} e^{2\xi}(8\xi^2 + 24\xi + 12)x^3 \\ &\leq \frac{1}{6} e \cdot \left(8 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 24 \cdot \tfrac{1}{2} + 12\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \frac{13}{24} e \overset{e<3}{<} \frac{13}{8} < 2. \end{aligned}$$

(b) Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x - \alpha \cos(x) - \beta$ mit $\alpha \in (0, 1), \beta > 0$. Dann ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig und es gilt

$$\begin{aligned} f(0) &= -\alpha - \beta < 0, \\ f(\alpha + \beta) &= \alpha(1 - \cos(\alpha + \beta)) \geq 0. \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es mindestens ein $x_0 \in [0, \alpha + \beta]$ mit $f(x_0) = 0$, d.h. x_0 ist eine Lösung von

$$x = \alpha \cos(x) + \beta.$$

Aufgabe 4:

(a) Die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) = \ln\big(\sin(\alpha x)\big) \quad (\alpha > 0) \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = \ln\big(\sin(x)\big)$$

sind differenzierbar und es gilt $\lim\limits_{x\to 0+} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0+} f_2(x) = 0$. Ferner ist $f_1'(x) = \frac{\alpha\cos(\alpha x)}{\sin(\alpha x)}$ und $f_2'(x) = \frac{\cos(\alpha x)}{\sin(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für alle $x \neq 0$ gilt $f_2'(x) \neq 0$. Folglich gilt nach der Regel von l'Hospital (vgl. Abschnitt 11.9):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} \frac{\ln\big(\sin(\alpha x)\big)}{\ln\big(\sin(x)\big)} &= \lim_{x\to 0+} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\alpha\sin(x)\cdot\cos(\alpha x)}{\cos(x)\cdot\sin(\alpha x)} \\ &= \alpha \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(\alpha x)}{\cos(x)} \cdot \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(x)} = \alpha \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(x)}.\end{aligned}$$

Nun sind die Funktionen $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_1(x) = \sin(\alpha x) \qquad \text{und} \qquad g_2(x) = \sin(x)$$

differenzierbar und es gilt $\lim\limits_{x\to 0+} g_1(x) = \lim\limits_{x\to 0+} g_2(x) = 0$. Ferner ist $g_1'(x) = \alpha\cos(\alpha x)$ und $g_2'(x) = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für alle $x \neq 0$ gilt $g_2'(x) \neq 0$. Folglich gilt nach der Regel von l'Hospital (vgl. Abschnitt 11.9):

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{g_1'(x)}{g_2'(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(x)}{\alpha\cos(\alpha x)} = \frac{1}{\alpha}.$$

Es ergibt sich insgesamt

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(x)} = 1.$$

(b) Wir substituieren $t = \frac{1}{x}$. Dies liefert $dt = -\frac{1}{x^2}\,dx$ und damit

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\,dx = -\int_1^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+t}\,dt = -\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_{t=1}^{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - \frac{5}{4}\sqrt{\frac{5}{4}}\right).$$

(c) (i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left|\frac{\cos(x)}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Da das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ konvergiert, ist $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,dx$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{2+\sin(x)}{x} \geq \frac{1}{x}.$$

Da das uneigentliche Integral $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ divergiert, ist $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2+\sin(x)}{x}\,dx$ nach dem Minorantenkriterium divergent.