Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 6

a) f_1 ist injektiv, denn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ gilt

$$f_1(x_1) = f_1(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 .$$

f_1 ist auch surjektiv. Um dies zu begründen, müssen wir zeigen, dass es zu jedem $y \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ ein $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ gibt mit $f_1(x) = y$. Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Ist $x := y \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ gesetzt, so gilt $f_1(x) = y$.

Da f_1 sowohl injektiv als auch surjektiv ist, ist f_1 bijektiv. Daher existiert die Umkehrfunktion $f_1^{-1} \colon \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ von f_1. Zur Berechnung von f_1^{-1} lösen wir die Gleichung $f_1(x) = y$ nach x auf (hier sind $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, y \in f_1(\mathbb{R} \setminus \{0,1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$): $f_1(x) = y \;\Leftrightarrow\; x = y$. Also ist $f_1^{-1} \colon \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $f_1^{-1}(y) = y$.

Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ gilt

$$f_2(x) = 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1-x+x}{1-x} = \frac{1}{1-x} .$$

f_2 ist injektiv, denn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ ergibt sich

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 - 1 \neq x_2 - 1 \quad \overset{x_1,x_2\neq 1}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{x_1-1} \neq \frac{1}{x_2-1} \quad \Rightarrow \quad f_2(x_1) \neq f_2(x_2) .$$

f_2 ist auch surjektiv: Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Für $x := 1 - \frac{1}{y} \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ gilt

$$f_2(x) = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{y})} = \frac{1}{1-1+\frac{1}{y}} = y .$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass f_2 bijektiv ist und daher die Umkehrfunktion f_2^{-1} existiert. Dem Beweis der Surjektivität von f_2 entnehmen wir $f_2^{-1} \colon \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{R}\setminus\{0,1\}, f_2^{-1}(y) = 1-\frac{1}{y}$.

Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ gilt $f_3(x) = 1 - \frac{1}{x} = f_2^{-1}(x)$. Also sind f_3 und f_2^{-1} identisch. Da f_2^{-1} bijektiv ist, gilt dasselbe auch für f_3. Außerdem ergibt sich $f_3^{-1} = f_2$.

b) Da f_1 die Identität auf $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ ist, gilt $f_1 \circ f_k = f_k$ für alle $k \in \{1,2,3\}$ und $f_j \circ f_1 = f_j$ für alle $j \in \{1,2,3\}$. Ferner erhalten wir wegen $f_2 = f_3^{-1}$ und $f_3 = f_2^{-1}$ für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

$$(f_3 \circ f_2)(x) = f_3(f_2(x)) = f_3(f_3^{-1}(x)) = x = f_1(x) ,$$
$$(f_2 \circ f_3)(x) = f_2(f_3(x)) = f_2(f_2^{-1}(x)) = x = f_1(x) ,$$

d.h. $f_3 \circ f_2 = f_1$ und $f_2 \circ f_3 = f_1$. Überdies erkennen wir für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

$$(f_2 \circ f_2)(x) = f_2(f_2(x)) = \frac{1}{1-f_2(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} = f_3(x) ,$$

$$(f_3 \circ f_3)(x) = f_3(f_3(x)) = 1 - \frac{1}{f_3(x)} = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 - \frac{x}{x-1} = \frac{x-1-x}{x-1} = \frac{1}{1-x} = f_2(x) ,$$

d.h. $f_2 \circ f_2 = f_3$ und $f_3 \circ f_3 = f_2$.

Aufgabe 7

a) Es gilt

$$|x-4| = |x+1| \quad\Leftrightarrow\quad (x-4)^2 = (x+1)^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 - 8x + 16 = x^2 + 2x + 1$$
$$\Leftrightarrow\quad 10x = 15 \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{3}{2}.$$

Alternativ führen auch geometrische Überlegungen zum Ziel: Gesucht sind diejenigen $x \in \mathbb{R}$, die denselben Abstand zu 4 wie zu -1 haben, d.h. x liegt genau in der Mitte: $x = \frac{4+(-1)}{2} = \frac{3}{2}$.

Eine weitere Alternative besteht darin, die Fallunterscheidung $x \in (-\infty, -1]$, $x \in (-1, 4]$, $x \in (4, \infty)$ durchzuführen, um die Beträge aufzulösen.

b) $|2x| > |5-2x|$ besagt, dass notwendig $x \neq 0$ sein muss. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt aber

$$|2x| > |5-2x| \quad\Leftrightarrow\quad \left|\frac{5-2x}{2x}\right| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad -1 < \underbrace{\frac{5-2x}{2x}}_{=\frac{5}{2x}-1} < 1 \quad\Leftrightarrow\quad 0 < \frac{5}{2x} < 2$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{2}{5}x > \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x > \frac{5}{4}.$$

c) Es ist

$$|2-|2-x|| \leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad -1 \leq 2 - |2-x| \leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad -3 \leq -|2-x| \leq -1$$
$$\Leftrightarrow\quad 1 \leq |2-x| \leq 3 \quad\Leftrightarrow\quad 1 \leq 2-x \leq 3 \text{ oder } -3 \leq 2-x \leq -1$$
$$\Leftrightarrow\quad -1 \leq -x \leq 1 \text{ oder } -5 \leq -x \leq -3 \quad\Leftrightarrow\quad -1 \leq x \leq 1 \quad\text{oder}\quad 3 \leq x \leq 5$$
$$\Leftrightarrow\quad x \in [-1,1] \cup [3,5].$$

d) Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall: $x \in (-\infty, -1)$. Mit $|x+1| = -(x+1)$ und $|x-1| = -(x-1)$ ergibt sich

$$|x+1| + |x-1| = -2x.$$

Deshalb gilt

$$|x+1| + |x-1| > 2 \quad\Leftrightarrow\quad -2x > 2 \quad\Leftrightarrow\quad x < -1.$$

2. Fall: $x \in [-1, 1)$. Hier ist $|x+1| = x+1$ und $|x-1| = -(x-1)$, also

$$|x+1| + |x-1| = 2.$$

Demzufolge lautet in diesem Fall die Ungleichung: $2 > 2$. Diese ist unlösbar.

3. Fall: $x \in [1, \infty)$. Wegen $|x+1| = x+1$ und $|x-1| = x-1$ folgt

$$|x+1| + |x-1| = 2x$$

und damit

$$|x+1| + |x-1| > 2 \quad\Leftrightarrow\quad 2x > 2 \quad\Leftrightarrow\quad x > 1.$$

Zusammenfassend haben wir:

$$|x+1| + |x-1| > 2 \quad\Leftrightarrow\quad x < -1 \text{ oder } x > 1 \quad\Leftrightarrow\quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Aufgabe 8

a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wegen $0 \le |x+y| \le |x|+|y|$ (Dreiecksungleichung!) erhalten wir

$$0 < 1 \le 1 + |x+y| \le 1 + |x| + |y|,$$

woraus

$$\frac{1}{1+|x+y|} \ge \frac{1}{1+|x|+|y|} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{1+|x+y|} \le -\frac{1}{1+|x|+|y|} \tag{1}$$

folgt. Mit zweimaliger Verwendung des Tipps kommen wir auf

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} = 1 - \frac{1}{1+|x+y|} \overset{(1)}{\le} 1 - \frac{1}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}.$$

Damit ist die erste behauptete Ungleichung bewiesen. Nun zur zweiten: Es gilt

$$\begin{aligned} & |x|+|y| \ge |x| \ge 0 \\ \Rightarrow\ & 1+|x|+|y| \ge 1+|x| \ge 1 > 0 \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{1+|x|+|y|} \le \frac{1}{1+|x|} \\ \overset{|x|\ge 0}{\Rightarrow}\ & \frac{|x|}{1+|x|+|y|} \le \frac{|x|}{1+|x|}. \end{aligned}$$

Ebenso (vertausche x und y) bekommen wir

$$\frac{|y|}{1+|x|+|y|} \le \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \le \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

b) Wiederum seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten die beiden Fälle $x - y \ge 0$ und $x - y < 0$.

1. Fall: $x \ge y$. Dann ist $|x-y| = x - y$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{x+y+|x-y|}{2} &= \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max\{x,y\}, \\ \frac{x+y-|x-y|}{2} &= \frac{x+y-(x-y)}{2} = \frac{2y}{2} = y = \min\{x,y\}. \end{aligned}$$

2. Fall: $x < y$. Dann ist $|x-y| = -(x-y) = -x+y$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{x+y+|x-y|}{2} &= \frac{x+y-x+y}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max\{x,y\}, \\ \frac{x+y-|x-y|}{2} &= \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \min\{x,y\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 9

a) Mit quadratischer Ergänzung erkennen wir

$$x^2 - x + 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \ge \frac{7}{4}.$$

Wegen $(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4} \in \{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ folgt

$$\min\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\} = \inf\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\} = \frac{7}{4}.$$

Da $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ nach oben unbeschränkt ist, existieren Maximum und Supremum von $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ nicht.

— bitte wenden —

b) Wir erkennen sofort, dass $B := \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist. Zur Bestimmung des Supremums, also der kleinsten oberen Schranke, bemerken wir, dass der Ausdruck $(-1)^n + \frac{1}{n}$ für ungerade natürliche Zahlen ≤ 0 ist. Da $(-1)^n = 1$ für gerade $n \in \mathbb{N}$ gilt und $n \mapsto \frac{1}{n}$ fallend ist, folgern wir aus $(-1)^n + \frac{1}{n} \leq (-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$: $\sup B = \max B = \frac{3}{2}$.

Nun zur unteren Schranke. Wir behaupten: $\inf B = -1 \notin B$, d.h. das Minimum von B existiert nicht.

Wir müssen uns zunächst davon überzeugen, dass -1 überhaupt eine untere Schranke von B ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt in der Tat

$$(-1)^n + \frac{1}{n} \geq (-1)^n \geq -1.$$

Nun zeigen wir, dass -1 auch die größte untere Schranke ist. Dazu nehmen wir an, dass es eine größere untere Schranke K gibt, etwa $K = -1 + \varepsilon$ mit einem $\varepsilon > 0$, und führen dies zu einem Widerspruch. Es soll also gelten

$$K \leq (-1)^n + \frac{1}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da dies insbesondere für ungerade n gilt, folgt für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$

$$-1 + \varepsilon \leq -1 + \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leq \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad n \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dies kann jedoch nicht sein, weil die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist. Also ist die Annahme falsch, und es gilt $-1 = \inf B$.

c) Die Menge $C := \{x + \frac{1}{x} : 0 < x \leq 42\}$ ist nicht nach oben beschränkt. Wäre nämlich Γ eine obere Schranke von C, so müsste

$$\forall x \in (0, 42]: \quad x + \frac{1}{x} \leq \Gamma$$

gelten. Insbesondere könnten wir dann $x = \frac{1}{n} \in (0, 42]$ einsetzen und erhielten: $\frac{1}{n} + n \leq \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Erst recht hätten wir dann $n \leq \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist. Somit existieren weder Supremum noch Maximum von C.

Die Menge C ist aber nach unten durch 2 beschränkt, denn für $x > 0$ erhalten wir durch Multiplikation mit x

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \geq 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 \geq 0$$

und letzteres ist offensichtlich wahr. Zudem gilt $2 \in C$ (man setze $x = 1$). Damit wissen wir: Keine Zahl > 2 kann untere Schranke von C sein. Also ist $\inf C = 2$ und wegen $2 \in C$ folgt auch $\min C = 2$.

Aufgabe 10

a) Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$ stimmt die Behauptung, denn beide Seiten der Gleichung ergeben dann 1: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Induktionsschluss (IS): Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (Induktionsvoraussetzung, kurz: IV). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(\tfrac{1}{2}n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \overset{\text{a)}}{=} 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2.$$

c) IA: Für $n = 1$ ist $\prod_{k=1}^{1}(1+\frac{1}{k})^k = (1+\frac{1}{1})^1 = 2 = \frac{2^2}{2} = \frac{(1+1)^{1+1}}{(1+1)!}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$ (IV). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k &= \Big(\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k\Big) \cdot \Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \Big(\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+2} = \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+2)!} \\
&= \frac{((n+1)+1)^{(n+1)+1}}{((n+1)+1)!}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 11

a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir beweisen die behauptete Identität durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $a - b = (a-b)a^0b^0 = (a-b)\sum_{k=0}^{0} a^{1-1-k}b^k$.
Induktionsschluss: Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$ (IV).
Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{(n+1)-1} a^{(n+1)-1-k}b^k &= (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k = (a-b)\left(a\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k + a^0b^n\right) \\
&= a(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k + (a-b)b^n \\
&\overset{IV}{=} a(a^n - b^n) + (a-b)b^n = a^{n+1} - b^{n+1}.
\end{aligned}$$

b) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Wir setzen $a = 1$ und $b = q$ in **a)** ein und erhalten

$$1^n - q^n = (1-q)\sum_{k=0}^{n-1} 1^{n-1-k}q^k = (1-q)\sum_{k=0}^{n-1} q^k.$$

Da $q \neq 1$ ist, folgt hieraus $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$.