Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. D. Frey

WS 2011/12
03.11.2011

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 12

Die Mengen A und B seien beschränkte, nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch $A + B := \{a + b \,:\, a \in A \text{ und } b \in B\} = \{x \,:\, \exists\, a \in A, b \in B : x = a + b\}$ eine beschränkte Menge ist und

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \qquad \text{sowie} \qquad \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

gelten.

Aufgabe 13

Gegeben seien die zwei komplexen Zahlen $z = 3 - i$ und $w = -1 + 2i$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von

a) z^3;

b) $1/z$;

c) $z \cdot w$;

d) $\overline{z}^2 + 1/w^2$.

Aufgabe 14

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z + 1 + i| = |z - 3 - 3i| \right\}$;

b) $B = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - i| \geq 1 \text{ und } |z - 1 - 2i| < 3 \right\}$;

c) $C = \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) \leq 1 \right\}$.

Aufgabe 15

Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die Lösungen der Gleichung sind:

a) $z^2 - 2z + 3 = 0$;

b) $z^2 = |z|^2$;

c) $z^3 + 8 = 0$.

Aufgabe 16

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{i}{2}\right)^k.$$

b) Es seien $w, z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\,|z|^2 + 2\,|w|^2$.
Was bedeutet dies geometrisch?

c) Zerlegen Sie das Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$, definiert durch

$$p(z) = z^4 + (1 + i)z^3 + (6 + i)z^2 + 6z,$$

in Linearfaktoren.