

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik
8. Übungsblatt

Aufgabe 39

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- a) Gilt für die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0,$$

so gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq |f(x_0)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wenn die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist und $f(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann ist die Funktion $1/f$ beschränkt.

Aufgabe 40

Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus:

- a) $\cos \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; b) $\cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 41

- a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument von

$$z_1 = (1 - i\sqrt{3})^{42}, \quad z_2 = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \right)^{201}.$$

- b) Es sei $t \in (0, 2\pi)$. Ermitteln Sie die Polarkoordinaten von $z(t) := 1 - e^{it}$.
c) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$. Berechnen Sie z^3 und z^{150} .

Aufgabe 42

Zeigen Sie die Identitäten

- a) $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x + y \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;
b) $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$;
c) $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$;
d) $\operatorname{Arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ für alle $x \in \mathbb{R}$;
e) $\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ für alle $x \in (-1, 1)$.

Aufgabe 43

a) Bestimmen Sie alle $x \in (0, \infty)$, die $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ erfüllen.

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt

i) $2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1}$; ii) $x^{\log_{10} x} = 100x$.

c) Zeigen Sie:

$$\log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = 2 - \log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3}).$$

Aufgabe 44

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x(\cosh x - 1)}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - \cos x}{\tan x^2}$ ($a > 0$);

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$;

d) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tan x)^{\tan(2x)}$.

Hinweis zu c) und d): Logarithmieren Sie den zu untersuchenden Term.