

## Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

### 2. Übungsblatt

#### Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle  $x \in \mathbb{R}$  mit

a)  $|x - 4| = |x + 1|$ ,

b)  $|2x| > |5 - 2x|$ ,

c)  $|2 - |2 - x|| \leq 1$ ,

d)  $|x + 1| + |x - 1| > 2$ .

#### Aufgabe 2

a) Zeigen Sie für alle reellen Zahlen  $a > 0$  die Ungleichung

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

und zeigen Sie weiter, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn  $a = 1$  ist.

b) Beweisen Sie für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in \mathbb{R}$  die Gleichung

$$\binom{x+1}{k} = \binom{x}{k-1} + \binom{x}{k}.$$

#### Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

a) 
$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

(*Hinweis:* Verwenden Sie  $\frac{a}{1+a} = \frac{a+1-1}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+a}$  für  $a \neq -1$ .)

b) 
$$\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{und} \quad \min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Dabei ist

$$\max\{a, b\} := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq b \\ b, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \min\{a, b\} := \begin{cases} a, & \text{falls } a \leq b \\ b, & \text{sonst} \end{cases}.$$

c) 
$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

#### Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2.$$

b) Zeigen Sie, dass für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

c) Folgern Sie aus Teil b) die geometrische Summenformel: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

#### Aufgabe 5

a) Zeigen Sie, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq 1$ , gilt:

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

(*Hinweis:* Benutzen Sie die Gleichung  $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ .)

b) Beweisen Sie für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sqrt{n}.$$