

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend oder monoton fallend. Zeigen Sie, dass f über $[a, b]$ R -integrabel ist.

Aufgabe 2

Berechnen Sie für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \exp(ikx) \cdot \exp(-ilx) dx$$

und

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \cdot \sin(-lx) dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cdot \sin(-lx) dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cdot \cos(-lx) dx.$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie

i)

$$\int \frac{dx}{1-x^4}$$

ii)

$$\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + 1} dx$$

Aufgabe 4

Ist die Funktion $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

R -integrabel?

Aufgabe 5

Zeigen Sie:

a)

$$\int x^k e^{-x} dx = - \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!} x^l e^{-x} + c \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

wobei c eine Konstante ist.

b)

$$\Gamma(k+1) := \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y x^k e^{-x} dx = k! \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 6

Es seien $n, m \in \mathbb{N}_0$. Man berechne

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx \quad \text{und} \quad \int_{-1}^1 (1+x)^n (1-x)^m dx.$$

**Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten
Rutsch ins Jahr 2013!**