Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

WS 2012/13
26.01.2013

Übungsklausur

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 ((3+2+5) Punkte)

a) Die reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei nicht konvergent. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche nicht? Geben Sie entweder eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

i) Keine Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

ii) Die Menge $\{|a_n| : \ n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht nach oben beschränkt.

iii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Cauchy-Folge.

b) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Entscheiden Sie wieder, welche der folgenden Aussagen wahr und welche nicht wahr sind, und geben Sie eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

i) Wenn die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^\infty b_n$.

ii) Wenn $\sum_{n=1}^\infty b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Schreiben Sie folgende Ausdrücke in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

i) $\sqrt{i}$ ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{13}(1+i)^k$.

Lösung:

a) i) Die Aussage ist falsch: Sei $a_n = (-1)^n$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent, jedoch die Teilfolge $a_{2n} = 1$ konvergiert gegen 1.

ii) Die Aussage ist falsch: Sei wieder $a_n = (-1)^n$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent, jedoch $\{|a_n| : \ n \in \mathbb{N}\} = \{1\}$ ist nach oben durch 1 beschränkt.

iii) Die Aussage ist wahr: Jede reelle Cauchy-Folge konvergiert; wäre also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so wäre $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, im Widerspruch zur Voraussetzung.

b) i) Die Aussage ist falsch: Sei $b_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, die Reihe $\sum_{n=1}^\infty 1$ offensichtlich jedoch divergent.

ii) Die Aussage ist wahr: Nach Vorlesung folgt aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty b_n$, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist; insbesondere ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

c) i) Sei $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $z^2 = i$. Es folgt $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = i$ und damit $a^2 = b^2$ und $2ab = 1$. Es folgt $a = \pm b$ und $2ab = 1$. Da $a \in \mathbb{R}$, folgt $a = b$ und $2a^2 = 1$, also $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Wegen $a = b$ erhalten wir also die beiden Lösungen

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

der Gleichung $z^2 = i$. Dies ist die gesuchte Darstellung.

ii)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{13}(1+i)^k &= \left(\sum_{k=0}^{13}(1+i)^k\right) - 1 - (1+i) \\
&= \frac{1-(1+i)^{13+1}}{1-(1+i)} - 2 - i \\
&= \frac{1-(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{14}}{-i} - 2 - i \\
&= (1-2^7e^{i\frac{7\pi}{2}})i - 2 - i \\
&= (1+128i)i - 2 - i \\
&= -130.
\end{aligned}$$

Also gilt $\sum_{k=2}^{13}(1+i)^k = -130 = -130 + i \cdot 0$.

Aufgabe 2 ((5+5) Punkte)

a) Sei $0 < a < 1$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{a+x_n}{1+x_n}.$$

Zeigen Sie:

i) $x_n > \sqrt{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist streng monoton fallend.

iii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert. Bestimmen Sie den Grenzwert.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx} \quad ?$$

Berechnen Sie für diese x den Wert der Reihe.

Lösung:

a) i) Wir zeigen die Aussage mittels Induktion über n. Für $n = 0$ gilt $x_0 = 1 > \sqrt{a}$, da $0 < a < 1$ nach Voraussetzung. Sei die Aussage nun für ein $n \in \mathbb{N}_0$ bereits bewiesen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{a+x_n}{1+x_n} - \sqrt{a} \\
&= \frac{a + x_n - \sqrt{a}(1+x_n)}{1+x_n} \\
&= \frac{a - \sqrt{a} + x_n(1-\sqrt{a})}{1+x_n} \\
&> \frac{a - \sqrt{a} + \sqrt{a}(1-\sqrt{a})}{1+x_n} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Zeile $1 - \sqrt{a} > 0$, sowie die Induktionsvoraussetzung benutzt wurde, insbesondere $1 + x_n > 0$. Es folgt $x_{n+1} > \sqrt{a}$.

ii) Wir berechnen

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{a + x_n}{1 + x_n} - x_n \\ &= \frac{a + x_n - x_n(1 + x_n)}{1 + x_n} \\ &= \frac{a - x_n^2}{1 + x_n} \\ &< 0, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile $x_n > \sqrt{a} > 0$ nach Teil i) benutzt wurde. Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ streng monoton fallend.

iii) Nach ii) und i) ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ streng monoton fallend und nach unten beschränkt durch $\sqrt{a}$. Da jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge konvergiert, konvergiert also auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Wir setzen $x := \lim_{n\to\infty} x_n \geqslant \sqrt{a}$. Aus der Definition von x_{n+1} folgt $x = \frac{a+x}{1+x}$, also $x(1 + x) = a + x$ und damit $x^2 = a$. Dies impliziert $x = \sqrt{a}$ oder $x = -\sqrt{a}$. Wegen $x \geqslant \sqrt{a}$ folgt $x = \sqrt{a}$.

b) Wir berechnen

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|ne^{-nx}|} = \limsup_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n}e^{-x}) = e^{-x} \begin{cases} < 1 \text{ für } x > 0, \\ > 1 \text{ für } x < 0. \end{cases}$$

Damit ist nach dem Wurzelkriterium die Reihe konvergent für $x > 0$ und divergent für $x < 0$. Für $x = 0$ ist $ne^{-nx} = n$ keine Nullfolge, also die zugehörige Reihe divergent. Die Reihe konvergiert also genau für $x > 0$.

Für $x > 0$ berechnen wir den Wert der Reihe: Definiere

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \qquad f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1 - y}.$$

Diese Reihe ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1 (geometrische Reihe). Für die Ableitung dieser Reihe gilt nach Vorlesung

$$f'(y) = \sum_{n=1}^{\infty} ny^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)y^n = \sum_{n=0}^{\infty} ny^n + \frac{1}{1 - y}.$$

(wobei $\sum_{n=0}^{\infty} ny^n$ nach dem Wurzelkriterium ebenfalls für $|y| < 1$ konvergiert). Es folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} ny^n = f'(y) - \frac{1}{1 - y} = \left(\frac{1}{1 - y}\right)' - \frac{1}{1 - y} = \frac{1}{(1 - y)^2} - \frac{1}{1 - y} = \frac{y}{(1 - y)^2}.$$

Wir setzen nun $y := e^{-x}$. Dann gilt $|y| < 1$ und wir erhalten

$$\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}.$$

Aufgabe 3 ((7+3) Punkte)

a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := e^{-n \sin x}.$$

i) Bestimmen Sie die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, gegen die die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert.

ii) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig konvergent ist.

iii) Zeigen Sie: Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[\varepsilon, 1]$.

b) Die Funktion $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$g(x) = |x-1| + 3x - x^2.$$

Zeigen Sie, dass g eine Nullstelle besitzt.

Lösung:

a) i) Es gilt $f_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f_n(0) \to 1$ für $n \to \infty$. Für $x \in (0,1]$ gilt $\sin x > 0$, also $-n \sin x \to -\infty$ für $n \to \infty$ und damit $e^{-n\sin x} \to 0$ für $n \to \infty$. Damit ist die gesuchte Grenzfunktion gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

ii) Nach Vorlesung gilt: Die Grenzfunktion jeder gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig.

Wäre $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent, so müsste $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f aus i) konvergieren (da aus gleichmäßiger Konvergenz die punktweise Konvergenz folgt). Jedes f_n ist als Komposition stetiger Funktionen stetig, jedoch f ist in $x = 0$ unstetig. Also ist f_n nicht gleichmäßig konvergent.

Alternativ: Sei $\varepsilon := \frac{1}{3} > 0$. Für $n \geqslant 2$ setze $x_n := \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. Wegen $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ und da arcsin streng monoton wachsend ist, gilt $0 < x_n < 1$ für $n \geqslant 2$. Somit gilt für jedes $n \geqslant 2$

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = |e^{-1} - 0| = \frac{1}{e} > \frac{1}{3} = \varepsilon.$$

Damit konvergiert f_n nicht gleichmäßig gegen f.

iii) Die Funktion $\sin x$ ist auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ und insbesondere auf $[\varepsilon, 1]$ streng monoton wachsend. Ferner gilt $\sin \varepsilon > 0$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[\varepsilon,1]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x\in[\varepsilon,1]} |e^{-n\sin x} - 0| \\ &= e^{-n \sin \varepsilon} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Dies aber ist gerade die gleichmäßige Konvergenz auf $[\varepsilon, 1]$.

b) Möglichkeit 1:

Es gilt $g(0) = 1$ und $g(4) = -1$. Ferner ist g als Komposition stetiger Funktionen stetig. Also gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein x_0 mit $0 < x_0 < 4$ und $g(x_0) = 0$.

Möglichkeit 2:

Für $1 \leqslant x \leqslant 4$ ist $g(x) = x - 1 + 3x - x^2 = -x^2 + 4x - 1$. Die Gleichung $-x^2 + 4x - 1 = 0$ führt auf die Lösungen $2 \pm \sqrt{3}$. Es gilt $1 \leqslant 2 + \sqrt{3} \leqslant 4$ und damit $g(2 + \sqrt{3}) = 0$.

Aufgabe 4 ((3+4+3) Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \exp(\sqrt{1+\sin x}) - e$. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung von f im Punkt 0.

b) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Integrale (falls diese existieren):

   i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

   ii) $\int_1^\infty \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

c) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{\tan x}.$$

Lösung:

a) Es gilt $T_0^2 f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$. Wir berechnen in einer Umgebung um 0

$$f'(x) = \frac{1}{2}\exp(\sqrt{1+\sin x})\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$$

und

$$f''(x) = \frac{1}{2}\exp(\sqrt{1+\sin x})\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^2 x}{1+\sin x} - \frac{(\sin x)\sqrt{1+\sin x} + \frac{1}{2}\frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\sin x}}}{1+\sin x}\right).$$

Wir erhalten

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = \frac{e}{2}, \qquad f''(0) = 0.$$

Schließlich ist

$$T_0^2 f(x) = \frac{e}{2}x.$$

b) i) Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx &= [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \\ &= 0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 - 0 \\ &= 1.\end{aligned}$$

ii) Mit der Substitution $y = 2\sqrt{x}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx &= \lim_{r\to\infty}\int_1^r \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx \\ &= \lim_{r\to\infty}\int_2^{2\sqrt{r}} e^{-y} \, dy \\ &= \lim_{r\to\infty}[-e^{-y}]_2^{2\sqrt{r}} \\ &= \lim_{r\to\infty}(-e^{-2\sqrt{r}} + e^{-2}) \\ &= e^{-2}.\end{aligned}$$

c) Wegen $a < b$ gilt $a^x - b^x = \exp(x \log a) - \exp(x \log b) \neq 0$ für $x \neq 0$; genauso gilt $\tan x \neq 0$ in einer Umgebung um 0 (ohne $x = 0$). Ferner haben wir

$$\lim_{x \to 0} (a^x - b^x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to 0} \tan x = 0.$$

Damit sind alle Voraussetzungen für die Regel von de l'Hospital erfüllt und wir erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{\tan x} &= \lim_{x \to 0} \frac{(a^x - b^x)'}{(\tan x)'} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{(\log a) a^x - (\log b) b^x}{\frac{1}{\cos^2 x}} \\ &= \log a - \log b. \end{aligned}$$

Nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Mittwoch, den 06.02.2013, im Sekretariat (Zimmer 3B-02, Allianzgebäude 05.20) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, den 07.02.2013, von 13.45 Uhr bis 14.00 Uhr im Zimmer 3A-01 (Allianzgebäude 05.20) möglich.