

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

5. Übungsblatt

Aufgabe 25:

Die Folge (a_n) sei durch

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für gerade } n, \\ \frac{1}{2^n} & \text{für ungerade } n, \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

- (a) Zeigen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- (b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.
- (c) Warum ist das Leibniz-Kriterium hier nicht anwendbar?

Aufgabe 26:

Die Folge (a_n) sei durch $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

- (a) Zeigen Sie, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- (b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.
- (c) Warum ist das Leibniz-Kriterium hier nicht anwendbar?

Aufgabe 27:

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Reihenwert.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n+k}}$.

Aufgabe 28:

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Reihenwert.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1 - \frac{n}{e})e^{-n}}{n(n+1)},$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x)^n}{(1+2|x|)^{n-1}} \text{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 29:

Untersuchen Sie die folgenden Reihen jeweils auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n},$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2},$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \sqrt[n]{a}) \text{ mit } 0 < a < 1,$$

$$(iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)},$$

$$(v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1},$$

$$(vi) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} \right].$$

Aufgabe 30:

Untersuchen Sie die folgenden Reihen jeweils auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} \text{ mit } x \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^{n^2},$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n},$$

$$(iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)^n n!},$$

$$(v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2 + \sqrt{n^4+1}},$$

$$(vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n} - n + \sqrt[n+1]{n+1}}{n}.$$

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 25, 27 und 29 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.