

## Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

### 6. Übungsblatt

#### Aufgabe 31:

Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{2}(-1)^n)^n}{n^2}$$

(a) mit dem Quotientenkriterium bzw.

(b) mit dem Wurzelkriterium.

#### Aufgabe 32:

Sei für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$a_n = \left( \frac{2 + (-1)^n}{3} \right)^n.$$

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius  $R$  von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ .

(b) Berechnen Sie  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  und  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ . Welche Abschätzungen für  $R$  ergeben sich dadurch?

#### Aufgabe 33:

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

konvergiert, die aus ihr durch Umordnung hervorgehende Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

jedoch divergiert.

**Aufgabe 34:**

Sie für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergent, aber nicht absolut konvergent ist.
- (b) Zeigen Sie, dass das Cauchyprodukt von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  mit sich selbst divergiert.

**Hinweis:** Es gilt  $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 35:**

Für welche  $z \in \mathbb{C}$  bzw.  $x \in \mathbb{R}$  konvergieren die folgenden Potenzreihen?

- (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) z^n$
- (ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} z^{2n}$
- (iii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$
- (iv)  $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$
- (v)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

**Aufgabe 36:**

Für welche  $z \in \mathbb{C}$  bzw.  $x \in \mathbb{R}$  konvergieren die folgenden Potenzreihen?

- (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) z^{2n}$
- (ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{(n^2)}$
- (iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (z - 2i)^n$
- (iv)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$
- (v)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} z^n$

**Hinweis:** In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 31, 33 und 35 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.