**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
30.10.2017

# Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

## 2. Übungsblatt

**Aufgabe 7:**
Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils das Infimum, Minimum, Supremum und Maximum, sofern sie existieren.

(a) $A = \left\{x^2 - x + 2 | x \in \mathbb{R}\right\}$,

(b) $B = \left\{n + \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$.

**Aufgabe 8:**
Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils das Infimum, Minimum, Supremum und Maximum, sofern sie existieren.

(a) $A = \left\{x + \frac{1}{x} \middle| 0 < x \leq 42\right\}$,

(b) $B = \left\{\frac{x^2}{1+x^2} \middle| x \in \mathbb{R}\right\}$.

**Aufgabe 9:**
Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$,

(b) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie die erste Aussage auch ohne Verwendung der vollständigen Induktion.

**Aufgabe 10:**
Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$,

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie die letzte Aussage auch ohne Verwendung der vollständigen Induktion.
**Hinweis:** Es gilt $\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3 = n^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

**— Bitte wenden! —**

**Aufgabe 11:**
Zeigen Sie: Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$, dann

(a) $\alpha = \sup M < \infty \Leftrightarrow ((\forall x \in M : x \leq \alpha) \wedge (\forall \epsilon > 0 : \exists x \in M : x > \alpha - \epsilon))$,

(b) $\alpha = \sup M < \infty \Rightarrow (\exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M : x_n \to \alpha)$.

**Hinweis:** $(\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}, \mathbb{R} \ni \alpha = \sup M) \Leftrightarrow ((\forall x \in M : x \leq \alpha) \wedge (\forall x \in M \forall z \in \mathbb{R} z \geq x : z \geq \alpha))$.

**Aufgabe 12:**
Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, wobei

(a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

(b) $a_1 = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ und $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$,

(c) $a_n = (x^n + y^n)^{\frac{1}{n}}$ mit $x, y > 0$,
**Hinweis:** Untersuchen Sie zuerst den Fall $a_n = (c^n + 1)^{\frac{1}{n}}$ mit $0 \leq c \leq 1$

(d) $a_n b_n$ mit $(a_n)_n$ beschrenkt und $(b_n)_n$ Nullfolge.

**Hinweis:** In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 7, 9, 11 und 12 a)-b) besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.