Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
20.11.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

5. Übungsblatt

Aufgabe 26:
Zeigen Sie für $w, z \in \mathbb{C}$:

(i) $\overline{\overline{z}} = z$,

(ii) $\overline{w} \cdot \overline{z} = \overline{wz}$,

(iii) $|wz| = |w| \cdot |z|$,

(iv) $\mathrm{Re}(w\overline{z}) \leq |w| \cdot |z|$.

Aufgabe 27:
Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene

(i) $A = \{z \in \mathbb{C} |\, |z + 1 + \mathrm{i}| = |z - 3 - 3\mathrm{i}|\}$,

(ii) $B = \left\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(z^2) > 1\right\}$,

(iii) $C = \{z \in \mathbb{C} |\, |z - \mathrm{i}| \geq 1 \land |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 3\}$,

(iv) $D = \left\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z^2) \leq 1\right\}$.

Aufgabe 28:

(a) Sei $z = 4 - 3\mathrm{i}$ und $u = -1 + 2\mathrm{i}$. Bestimmen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil, sowie den Betrag von

(i) z^3,

(ii) $\frac{1}{z}$,

(iii) $z \cdot u$,

(iv) $\overline{z}^2 + \frac{1}{u^2}$.

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ die Gleichungen

(i) $z^3 + 8 = 0$,

(ii) $z^3 - (3 - \mathrm{i})z^2 - \mathrm{i}z + 1 + 3\mathrm{i} = 0$.
Hinweis: Es gibt eine Lösung z mit $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 29: Berechnen Sie Real- und Imaginärteil und die Polardarstellung von

(i) $(1+\mathrm{i})^2$,

(ii) $\left(1+\frac{1}{i}\right)^{-1}$,

(iii) $(1+i)\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$,

(iv) $\exp\left(4+i\frac{\pi}{3}\right)\exp\left(-2+i\frac{11\pi}{6}\right)$.

Aufgabe 30: Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls der Häufungspunkten der Folge $a_n = \cos(2\pi Cn) + \mathrm{i}\sin(2\pi Cn)$ mit

(a) $C \in \mathbb{N}$,

(b) $C \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 31: Beweisen Sie die folgende Aussagen:

(a) Sei $a, b \geq 0$ und $0 \leq s \leq 1$, dann $(a+b)^s \leq a^s + b^s$.
Hinweis: Sei $c > 0$, dann $c^s = \frac{c}{c^{1-s}}$.

(b) Sei $\mathbb{R}^d$ mit p-norm $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ und $1 \leq q \leq p < \infty$, dann $\forall x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_p \leq \|x\|_q$.

Aufgabe 32: Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge und $z_n \to z$. Beweisen Sie die folgende Aussagen:

(a) Sei $z \neq 0$, dann $\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |z_n| \geq \frac{|z|}{2}$.

(b) Sei $z \neq 0$, dann $\frac{1}{z_n} \to \frac{1}{z}$.

(c) Sei $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge und $w_n \to w \neq 0$, dann $\frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w}$.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgabe 26 und 30, 31, 32 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.