Zusammenfassungen: Ergänzungen HMI für Physik

Thema Direkter und Indirekter Beweis des Satzes: Voraussetzung A, Behauptung B.

Direkter Beweis

Folgere aus A die Behauptung B. Sind A wahr und die Argumentation richtig, so ist B wahr.

Beispiele: 1) Vorlesung: Aus $n \in \mathbb{N}$ und n geradzahlig folgt, dass n^2 eine gerade Zahl ist.

2) Beweis der de Morganschen Regeln

Es sei I eine Menge und für jedes $j \in I$ A_j eine Menge. ($\{A_j \mid j \in I\}$ heißt Mengenfamilie)

M sei eine Menge mit: $A_j \subset M$ für jedes $j \in I$

$$\bigcup_{j\in I} A_j := \{x \mid \exists_{j \in I}\, x \in A_j\}, \quad \bigcap_{j\in I} A_j := \{x \mid \forall_{j\in I}\, x \in A_j\}$$

Es gelten:
$$C_M\Big(\bigcup_{j\in I} A_j\Big) = \bigcap_{j\in I} C_M A_j \qquad (1)$$
$$C_M\Big(\bigcap_{j\in I} A_j\Big) = \bigcup_{j\in I} C_M A_j \qquad (2)$$

Bew von (1) direkt mittels der Definition von Gleichheit von Mengen und der Definition von C_M, $\bigcup_{j\in I}$, $\bigcap_{j\in I}$, Verneinung von $\exists$ und von $\forall$.

Beweis von (2) direkt mit (1) und $C_M(C_M A_j) = A_j$.

Indirekter Beweis

1) Beweis durch Kontraposition:
Wegen $(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (Bew: Wa-Werttafel)
wird anstelle von $A \Rightarrow B$ der Satz
$\neg B \Rightarrow \neg A$ bewiesen.

Beispiele: (1) Vorlesung: Aus $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade folgt: n ist gerade.

(2) Satz 3 (Vorlesung, Kap 1) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2) Widerspruchsbeweis (Reductio ad absurdum)
verwendet (Bew mittels Wa-Werttafel):
$(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B \Rightarrow C \wedge \neg C)$

Behalte die Voraussetzung A bei und nimm $\neg B$ als zusätzliche Vor (Widerspruchsannahme). Die Gesamtvoraussetzung ist somit $A \wedge \neg B$. Leite hieraus einen Widerspruch $(C \wedge \neg C)$ her, dann muss $A \wedge \neg B$ F also B w sein.

Beispiel: Es gibt unendlich viele Primzahlen.
Wir verwenden, dass jede natürliche Zahl ≥ 2 sich als Produkt von Primzahlen schreiben lässt.
Nimmt man an, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt, etwa die Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$, so erhält man durch Betrachten der Zahl $A := p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ einen Widerspruch.

3) (nur zitiert) Jede natürliche Zahl ≥ 2 kann auf genau eine Art (abgesehen von der Reihenfolge) als Produkt von Primzahlen geschrieben werden.