Zum Wurzel-, Quotientenkriterium (Kap 8 / Sätze 8, 9). $\liminf(a_n)$, $\limsup(a_n)$. Konvergenzradius.

1. (vgl. Kap 7 / Häufungspunkt (HP))

Satz 1 Jede beschränkte Folge (a_k) reeller Zahlen besitzt einen kleinsten und einen größten HP.

(Diese HPs kann man mittels Intervallhalbierung finden)

Mit $\liminf(a_k)$ wird der kleinste HP der Folge (a_n), durch $\limsup(a_k)$ der größte HP der Folge bezeichnet.

Das bedeutet ausführlich:

(1.1) $\gamma = \liminf(a_k) \iff$ für jedes $\varepsilon > 0$ gelten

1. $a_n < \gamma + \varepsilon$ für unendlich viele n
2. $a_n \leq \gamma - \varepsilon$ für höchstens endlich viele n

($\iff a_n > \gamma - \varepsilon$ für fast alle n)

$\Gamma = \limsup(a_k) \iff$ für jedes $\varepsilon > 0$ gelten

1. $a_n > \Gamma - \varepsilon$ für unendlich viele n
2. $a_n \geq \Gamma + \varepsilon$ für höchstens endlich viele n

($\iff a_n < \Gamma + \varepsilon$ für fast alle n)

Erinnerung. Bemerkung:

1) (a_k) ist konvergent $\iff \gamma = \Gamma = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$

2) H ist HP der Folge $(a_n) \iff$ es gibt eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ der Folge (a_n) mit $a_{n_k} \to H$ $(k \to \infty)$.

---

2. Zum Rechnen mit lim sup und lim inf

2.1 $\liminf(a_n) = -\limsup(-a_n)$

Argumentiere mit (1.1).

2.2 (a_n), (b_n) seien Folgen mit $a_n \le b_n$ $\forall n$

Dann gelten: (i) $\limsup (a_n) \le \limsup (b_n)$

(ii) $\liminf (a_n) \le \liminf (b_n)$

(i) beweist man indirekt, indem man aus $\limsup (a_n) > \limsup (b_n)$ einen Widerspruch zur Def von $\limsup (b_n)$ herleitet.

(ii) folgt aus (i) mit 2.1

2.3 Für eine Folge (a_n), $a_n > 0$ $(\forall n)$ gelten

(i) $\limsup (\ln a_n) = \ln (\limsup (a_n))$

(ii) $\liminf (\ln a_n) = \ln (\liminf a_n)$

Argumentiere mittels Teilfolgen (1./Bemerkung 2), mit der Monotonie und Stetigkeit von exp und ln und damit, dass exp und ln Umkehrfunktionen voneinander sind.

2.4 Aus Aufgabe 10a)/10. Übung folgt für Folgen (a_n), (b_n) mit $a_n > 0$, $b_n > 0$, wenn man 2.3 berücksichtigt:

$$\liminf (a_n b_n) \le (\liminf (a_n))(\limsup (b_n)) \le \limsup (a_n b_n)$$

Hieraus folgt für $a_n > 0$

2.5

$$\liminf a_n = \frac{1}{\limsup \frac{1}{a_n}}$$

$$\liminf \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\limsup a_n}$$

---

3. Satz 2 $a_n > 0$. Es gelten

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{(1)}{\le} \liminf \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \sqrt[n]{a_n} \underset{(2)}{\le} \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Aus (2) folgt mit 2.5 (1).

Zum Beweis von (2).

Nach Def von $\alpha := \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \alpha + \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.

Hieraus folgt: $a_n \leq (\alpha+\varepsilon)^{n-N} a_N$, $n \geq N$.

Also: $\sqrt[n]{a_n} \leq (\alpha+\varepsilon)\sqrt[n]{(\alpha+\varepsilon)^{-N} a_N}$

Da $\limsup \sqrt[n]{(\alpha+\varepsilon)^{-N} a_N} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\alpha+\varepsilon)^{-N} a_N} = 1$ gilt,

folgt also: $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \alpha+\varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$. Das ist (2).

---

4. Das Wurzelkriterium (Kap 8 / Satz 9)

Es liegt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ vor; $\rho := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Dann gelten: Aus $\rho < 1$ folgt: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent

Aus $\rho > 1$ folgt: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist divergent

$\rho = 1$ gibt hinsichtlich Konvergenz / Divergenz keine Aussage.

(Die Definition von $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ liefert gerade die Bedingung von Satz 9 / Kap 8).

5. Das Quotientenkriterium (Kap 8 / Satz 8)

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \neq 0$ $\forall k$ ist gegeben. Setze $r = \liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ und $R = \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Es gelten:

Aus $R < 1$ folgt die absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$,

aus $r > 1$ folgt die Divergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Falls $r \leq 1 \leq R$ erhält man keine Konvergenz / Divergenzaussage.

6. <u>Vergleich Wurzel-/Quotientenkriterium</u>

Mit den Bezeichnungen aus <u>4.</u>, <u>5.</u> liefert Satz 2 für eine Folge $(|a_n|)_n$, $a_n \neq 0$:

$$r \leq \rho \leq R$$

$$\Rightarrow: \underbrace{r > 1 \Rightarrow \rho > 1 \quad \text{und} \quad R < 1 \Rightarrow \rho < 1}$$

Liefert das Q-Kriterium Konvergenz/Divergenz, so gibt das W-Kriterium dasselbe.

Aber: $\rho > 1 \not\Rightarrow r > 1$, $\rho < 1 \not\Rightarrow R < 1$.

Das W-Kriterium kann Konvergenz / Divergenz ergeben, während das Q-Kriterium nicht anwendbar ist.

<u>Beispiele:</u> 1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$

Hier findet man: $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $r = 0$, $R = \infty$

2) Für $\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \cdots$

berechnet man: $\rho = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{8}$, $R = 2$.

<u>7.</u> Wendet man <u>4.</u> auf die Potenzreihe $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ an, so liegt absolute Konvergenz für die $z \in \mathbb{C}$ vor, die $\limsup \sqrt[k]{|a_k| |z|^k} = |z| \limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ erfüllen und Divergenz für die z, für die $|z| \limsup \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ gilt. Mit der Definition des Konvergenzradius A einer Potenzreihe bedeutet das: (Kap 11 / <u>11.2</u>)

$$A = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

$\underset{=}{\ddot{U}}^4$: Leite mit Satz 2 hier die Formel für den Konvergenzradius aus Satz 2 / Kap 11 her.

---

8. Aus Satz 2 liest man unmittelbar ab:

Satz 3 Es sei (a_n) eine Folge positiver Zahlen. Es gilt dann: Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, so existiert auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, und beide Grenzwerte sind gleich.

Beispiele:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$