Zu Abschnitt 13.1 / Satz 1

1. $f: D \to \mathbb{R}$ (D Intervall) heißt auf D <u>gleichmäßig stetig</u>, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ist für alle $x, y \in D$ mit $|x-y| < \delta$.

<u>Beispiele</u>: 1) $f(x) = c$ (c konst) ist auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig

2) $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, ist gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$

3) $f(x) = x^2$ ist auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig

4) $f(x) = x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig stetig

5) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ist auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig

<u>Bemerkung</u>: Ist f auf D gleichmäßig stetig, so ist f auf D (d.h. in jedem Punkt aus D) stetig.

2. <u>Satz</u> <u>Eine auf $[a,b]$ stetige Funktion ist auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig.</u>

<u>Beweis Skizze:</u>

Wäre der Satz falsch, so existierte ein $\varepsilon_0 > 0$ und Folgen (x_n), (y_n) aus $[a,b]$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ $(n \in \mathbb{N})$.

Die Folge (x_n) ist beschränkt und liegt in $[a,b]$: es gibt eine Teilfolge (x_{n_k}), die gegen ein $p \in [a,b]$ konvergiert. Aus $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ folgt, dass $y_{n_k} \to p$ $(k \to \infty)$ gilt.

Da f auf $[a,b]$ stetig ist, folgt: $f(x_{n_k}) \to f(p)$ $(k \to \infty)$ und $f(y_{n_k}) \to f(p)$ $(k \to \infty)$. Das ist ein Widerspruch gegen $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$ für alle k.

3. Satz 1 a), 13.1

Ist f stetig auf $[a,b]$, so ist f über $[a,b]$ integrierbar.

Wir verwenden das Kriterium der Vorlesung (S. 51):

(*) $\left\{ f \in I[a,b] \iff \right.$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung Z von $[a,b]$ mit $\Omega(f,Z) - \omega(f,Z) < \varepsilon$.

Beweis-Skizze zu Satz 1 a): Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig, fest.
Da f gleichmäßig stetig auf $[a,b]$ ist, gibt es zu $\frac{\varepsilon}{b-a}$ ein δ so, dass aus $x,y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$ folgt $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Wähle Z mit $\|Z\| < \delta$ (etwa $Z = \{x_k, k = 0, 1, \dots, n\}$ mit $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ und $\|Z\| = \frac{b-a}{n} < \delta$: also $n > \frac{b-a}{\delta}$)

Dann folgt für diese Zerlegung Z:

$$\Omega(f,Z) - \omega(f,Z) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon$$

Satz 1 a), 13.1

Ist f auf $[a,b]$ monoton und beschränkt, so ist f über $[a,b]$ integrierbar.

Bew.-Skizze: o.B.d.A. sei $f \uparrow$.

Für Z_n: $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$, $k = 0, 1, \dots, n$

gilt: $\Omega(f, Z_n) - \omega(f, Z_n) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})$

$$= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

4. Ist $f \in I[a,b]$, so ist $|f| \in I[a,b]$.

Wir überlegen uns, dass $f^+(x) = \begin{cases} f(x) & , f(x) \geq 0 \\ 0 & , f(x) < 0 \end{cases}$, $a \leq x \leq b$,

aus $I[a,b]$ ist.

Bezeichne mit I_k das k-te Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ einer Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ von $[a,b]$.

Setze $M_k = \sup\{f(x), x \in I_k\}$, $m_k = \inf\{f(x), x \in I_k\}$,

$M_k^+ = \sup\{f^+(x), x \in I_k\}$, $m_k^+ = \inf\{f^+(x), x \in I_k\}$.

Man sieht leicht ein: $M_k^+ - m_k^+ \leq M_k - m_k$. Damit gilt für jede Zerlegung Z:

$$\Omega(f^+, Z) - \omega(f^+, Z) \leq \Omega(f, Z) - \omega(f, Z).$$

Da $f \in I[a,b]$ gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein Z mit $\Omega(f, Z) - \omega(f, Z) < \varepsilon$.

Für diese Zerlegung Z gilt also erst recht $\Omega(f^+, Z) - \omega(f^+, Z) < \varepsilon$, so dass $f^+ \in I[a,b]$ ist.

Analog sieht man ein, dass $f^- \in I[a,b]$ gilt, wobei

$$f^-(x) := \begin{cases} -f(x) & , f(x) < 0 \\ 0 & , f(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Damit ist $|f| \in I[a,b]$ wegen $|f| = f^+ + f^-$.