I. Ergänzung zu 13.4, 13.5

1) Nach Satz 6 / 13.4 bedeutet die Diff'barkeit einer Funktion $f: (a,b) \to \mathbb{C}$ in x_0, dass wir schreiben können:

(6.1) $\quad f(x) = f(x_0) + f^*(x)(x - x_0)$, $x \in (a,b)$, mit einer in x_0 stetigen Funktion f^* und mit $f'(x_0) = f^*(x_0)$.

Definiere $f^{**}(x) := f^*(x) - f'(x_0)$. Man erhält aus (6.1) hiermit

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\substack{\text{Tangente an } y = f(x) \\ \text{in } (x_0, f(x_0))}} + \underbrace{f^{**}(x)(x - x_0)}_{=: r(x)}$$

: $f(x)$ ist linear approximierbar (durch eine Gerade) in x_0 mit einem Fehler $r(x)$, für den $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$ gilt.

2) Beweis von Satz 9 (13.5 / S. 57):

Skizze: f in y_0 diff'bar: $f(y) = f(y_0) + (y - y_0) f^*(y)$, $y \in I$

mit f^* in y_0 stetig und $f^*(y_0) = f'(y_0)$

Stetigkeit von f^* in y_0 und $f'(y_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ $\quad y - y_0 = (f(y) - f(y_0)) \frac{1}{f^*(y)} \quad$ ($y \in \underbrace{\text{Umgebung von } y_0}_{U}$)

mit $y = g(x)$, $y_0 = g(x_0)$ bedeutet das:

$$g(x) - g(x_0) = (x - x_0)\, g^*(x) \quad \text{mit } g^*(x) := \frac{1}{f^*(g(x))}, \quad x \in f(U).$$

Für g^* sind die Bedingungen aus Satz 6 erfüllt. Es folgt

$$g'(x_0) = g^*(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))}.$$

✓

<u>Beispiel</u>: $y = \cosh(x)$ ist stetig, diff'bar, $\uparrow$ (streng) für $x > 0$

$y = g(x) = \operatorname{ar}\cosh(x)$ ist stetig, diff'bar, $\uparrow$ (streng) für $x > 1$.

Mit $(D\cosh)(x) = \sinh(x)$ und Satz 9 erhält man:

$$g'(x) = \frac{1}{\sinh(\operatorname{ar}\cosh(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x>1)$$

mit $\sinh(x) = \sqrt{\cosh^2(x) - 1}$ $(x > 0)$.

II. <u>Satz</u> (<u>Vertauschung von lim und $\int$</u>) (vgl. S.21-26 <u>Ergänzungen</u>)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist ein $f_n \in C[a,b]$ gegeben.
Die Folge f_n konvergiere auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen die Funktion f. (insbesondere gilt: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$).

Dann hat man: $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n)(x)\,dx$.

<u>Beweis</u>: Nach Satz 1 (S.24 Ergänzungen) ist $\lim_{n\to\infty} f_n \in C[a,b]$ und also integrierbar.
Mit den Ungleichungen aus <u>B.2</u> sieht man:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f_n - f|(x)\,dx$$

$$\le \|f_n - f\|_\infty (b-a)$$

(S. 23 Ergänzungen) $\rightarrow 0$ $(n\to\infty)$
Def der gleichmäßigen Konvergenz

✓

Beispiel:

$$f_n(x) := \begin{cases} 2n^2 x & , 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2 x & , \frac{1}{2n} < x \le \frac{1}{n} \\ 0 & , \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist f_n auf $[0,1]$ stetig.

Es gilt für jedes $x \in [0,1]$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \; (= f(x))$.

Wegen $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty \ge f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n \to \infty \; (n \to \infty)$ gilt nicht, dass f_n gegen f gleichmäßig konvergiert (obwohl die Grenzfunktion $f = 0$ stetig ist).

Dass f_n nicht gleichmäßig gegen f konvergiert, sieht man auch mit dem vorstehenden Satz:

Wegen $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \ne \int_0^1 \left(\lim f_n\right)(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0.$$