Einiges zu linearen Differentialgleichungen (DGln) 2. Ordnung.

1. Es seien a, b konstante und g eine auf dem Intervall I stetige Funktion.
Wir behandeln die Gleichung

(1) $\quad v''(x) + 2a v'(x) + b\, v(x) = g(x), \quad x \in I.$

Gesucht ist $v \in C^2(I)$, so dass (1) erfüllt ist.

Bemerkungen: 1) Vieles von dem, was jetzt für (1) angestellt wird, kann man analog durchführen, wenn die Koeffizienten a, b Funktionen (von x) sind.

2) (1) ist linear. D.h. mit $(\tilde{L}v)(x) := v''(x) + 2av'(x) + b\, v(x)$ gilt:

$$(\tilde{L}(\alpha v_1 + \beta v_2))(x) = \alpha(\tilde{L} v_1)(x) + \beta(\tilde{L} v_2)(x)$$

für Konstanten α, β und $v_1, v_2 \in C^2(I)$

Wir vereinfachen (1) formal: v genüge (1). Dann gilt für $y(x) := e^{ax} v(x)$:

(2) $\quad y''(x) + (b - a^2)\, y(x) = e^{ax} g(x)$

2. Wir behandeln

(2) $\quad \underline{(Ly)(x) := y''(x) + \omega^2 y(x) = f(x), \quad x \in I, \ \omega \text{ konstant}}$

Ist y Lösung von $Ly = f$ auf I, so löst $v(x) := e^{-ax} y(x)$ (1) mit $g(x) = e^{-ax} f(x)$.

Es soll $\mathcal{L}_f := \{ y \in C^2(I) \,/\, Ly = f \text{ auf } I \}$ ("die allgemeine Lösung von (2)") bestimmt werden.

<u>1. Schritt</u> Im folgenden benötigen wir eine Lösung u der homogenen Gleichung $Ly = 0$: also $u \in \mathcal{L}_0$.

$\omega \neq 0$ ($\omega = 0$ ist trivial)

Der Ansatz $u(x) = e^{\lambda x}$ gibt $\lambda^2 = -\omega^2$

und also, falls $\omega \in \mathbb{R}$, etwa $u(x) = \sin \omega x$,

falls $\omega = i\rho \ (\rho \in \mathbb{R})$, etwa $u(x) = e^{\rho x}$.

<u>2. Schritt</u> Es sei eine nichttriviale Lösung u von $Ly = 0$ bekannt. Zur Lösung von <u>(2)</u> wird der Ansatz

<u>(3)</u> $\qquad \underline{y(x) := u(x) s(x)}$

gemacht mit einer aus der Forderung $y \in \mathcal{L}_f$ zu berechnenden Funktion s unter Verwendung von $u \in \mathcal{L}_0$, $u \neq 0$.

Man erhält für s die Gleichung

$$u s'' + 2u's' = f(x), \quad x \in I.$$

$$\Rightarrow \quad (u^2 s')'(x) = f(x) u(x), \quad x \in I$$

$\Rightarrow \quad s(x) = \ldots \qquad$ und mit <u>(3)</u>:

$$\underline{(4)} \quad y(x) = u(x) \int_{\tau = x_0}^{x} \left(\int_{t = x_0}^{\tau} \frac{f(t) u(t)}{u^2(\tau)} dt \right) d\tau + c_2 u(x) \int_{x_0}^{x} \frac{d\tau}{u^2(\tau)} + c_1 u(x)$$

Hierbei sind c_1, c_2 beliebige Konstanten, x_0 ist beliebig aus I. (x_0, c_1, c_2 sind nicht voneinander unabhängig: eine Änderung von x_0 zieht eine Änderung von c_1 oder c_2 nach sich). <u>Ü</u>: <u>Probe</u>: Rechne nach, dass für y aus <u>(4)</u> $Ly = f$ gilt.

Es ist

$$y_p(x) := u(x) \int_{x_0}^{x} \left(\int_{t = x_0}^{\tau} \frac{f(t) u(t)}{u^2(\tau)} dt \right) d\tau \in \mathcal{L}_f \quad \text{mit } y_p(x_0) = y_p'(x_0) = 0.$$

Mit $y_1(x) = u(x)$, $y_2(x) := u(x) \int_{x_0}^{x} \frac{d\tau}{u^2(\tau)}$ schreibt sich

(4) wie folgt: $y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

y_1, y_2 sind <u>linear unabhängige</u> Lösungen aus $\mathcal{L}_0$
(es gibt keine Konstante c, sodass $y_1(x) = c\, y_2(x)$, $x \in I$, gilt).

Man hat: $\mathcal{L}_0 =$ "die allgemeine Lösung von $Ly = 0$"

$$= \{ y \mid y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \ , \ c_1, c_2 \in \mathbb{C} \}$$

und $\mathcal{L}_f \underset{\uparrow}{=} y_p + \mathcal{L}_0 := \{ y \in C^2(I) \mid y = y_p + y_0 \ , \ y_0 \in \mathcal{L}_0 \}$

In Worten: Man erhält alle Lösungen der inhomogenen Gleichung $Ly = f$, indem man eine spezielle Lösung (hier y_p) berechnet und alle Lösungen von $Ly = 0$ dazu addiert.
(d.h. insbesondere: Zu jeder Lösung $y \in \mathcal{L}_f$ gibt es ein $y_0 \in \mathcal{L}_0$ derart, dass $y = y_p + y_0$ ist)

Es folgen noch Bemerkungen zum <u>Anfangswertproblem</u> und zu der Methode "<u>Variation der Konstanten</u>".