I. Das <u>Anfangswertproblem (AWP)</u>. Es sei $x_0 \in I$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
gesucht ist $y \in C^2(I)$ mit

$$Ly(x) = y''(x) + \omega^2 y(x) = f(x),\ x \in I$$
$$y(x_0) = \alpha,\ y'(x_0) = \beta.$$

<u>Dieses Problem besitzt genau eine Lösung y auf I.</u>
<u>(Existenz- und Eindeutigkeitssatz)</u>:
In der Formel (4)/S.39 lassen sich c_1, c_2 eindeutig bestimmen zu: $c_1 = \frac{\alpha}{u(x_0)}$, $c_2 = \beta u(x_0) - \alpha u'(x_0)$.

II. Wir bezeichnen das obige AWP durch $A(f;\alpha,\beta)$.
Unser Ergebnis lässt sich dann so formulieren: Für jedes Datentripel $\{f;\alpha,\beta\}$ besitzt das Problem $A(f;\alpha,\beta)$ genau eine Lösung. Folgerungen:

1) Es gilt $\quad y$ löst $A(0;0,0) \Longleftrightarrow y = 0$.

2) Es gibt genau eine Funktion y_{h_1} $(\neq 0)$, die $A(0;1,0)$ und genau eine Funktion y_{h_2} $(\neq 0)$, die $A(0;0,1)$ löst.

Für y_{h_1}, y_{h_2} gelten: ① y_{h_1}, y_{h_2} sind auf I linear unabhängig,
<u>d.h.</u>: $c_1 y_{h_1}(x) + c_2 y_{h_2}(x) = 0,\ x \in I$, ist für Konstanten c_1, c_2 nur möglich mit $c_1 = c_2 = 0$.

② $\mathcal{L}_0 = \{y \mid y$ ist Linearkombination von $y_{h_1}, y_{h_2}\}$

denn: $y \in \mathcal{L}_0$ kann so dargestellt werden:

$$y(x) = y(x_0)\, y_{h_1}(x) + y'(x_0)\, y_{h_2}(x),\ x \in I$$

Das Ergebnis vom letzten Mal (dort unbegründet) fällt jetzt hier mit ab, wenn man sich klarmacht, dass y_{h_1}, y_{h_2} Linearkombinationen von y_1, y_2 sind:

Mit $\Delta(x) := y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x)$, $x \in I$, erhält man

$$y_{h_1}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (\text{analog für } y_{h_2})$$

mit $c_1 = \frac{y_2'(x_0)}{\Delta(x_0)}$, $c_2 = \frac{-y_1'(x_0)}{\Delta(x_0)}$.

Es gilt mit den Funktionen y_1, y_2 (S. 40 oben)

$\Delta(x_0) = 1$.

Wegen $\Delta'(x) = 0$, folgt $\Delta(x) = 1$, $x \in I$.

<u>Ergebnis</u>: $\mathcal{L}_0 = \{y \mid y$ ist Linearkombination (LK) von $y_1, y_2\}$

$= \{y \mid y$ ist LK von $y_{h_1}, y_{h_2}\}$.

<u>IV. Zur Lösung der inhomogenen Gleichung $Ly = f$.</u>

1) Das Vorgehen S. 38/39 liefert eine Lösung $y_p \in \mathcal{L}_f$ unter der Voraussetzung, dass eine nichttriviale Funktion $u \in \mathcal{L}_0$ bekannt ist.

2) <u>Variation der Konstanten</u>

Ist $\mathcal{L}_0$ bekannt, d.h. sind zwei linear unabhängige Funktionen aus $\mathcal{L}_0$ (etwa y_1, y_2 oder y_{h_1}, y_{h_2}) bekannt, so mache den Ansatz für $y_p \in \mathcal{L}_f$:

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

mit zu bestimmenden Funktionen c_1, c_2.

Verlangt man:

$$\underline{(1)} \quad c_1'(x)\, y_1(x) + c_2'(x)\, y_2(x) = 0,$$

so erhält man aus der Forderung $y_p \in \mathcal{L}_f$ mit $y_1, y_2 \in \mathcal{L}_0$

$$\underline{(2)} \quad c_1'(x)\, y_1'(x) + c_2'(x)\, y_2'(x) = f(x)$$

Aus $\underline{(1)}$, $\underline{(2)}$ folgt:

$$c_1'(x) = \frac{-f(x)\, y_2(x)}{\Delta(x)} = -f(x)\, y_2(x), \quad c_2'(x) = \frac{f(x)\, y_1(x)}{\Delta(x)} = f(x)\, y_1(x)$$

und damit auch c_1, c_2.

3) Je nach Form der Funktion f (Polynom, exp-Fkt, trigonometrische Funktion) kann man versuchen, die Gleichung durch einen geeigneten Ansatz zu lösen.

Versuchen Sie sich an den folgenden Beispielen:

1) $v''(x) + 4v'(x) + 4v(x) = e^x$, $v(0) = 1$, $v'(0) = 0$

2) $v''(x) - 2v'(x) + 5v(x) = e^x$, $v(0) = 1$, $v'(0) = 0$

3) $y'(x) + y(x) \sin x = \sin^3 x$

Dies ist eine Gleichung des Typs, auf die der Ansatz $\underline{(3)}$/S. 39 für s geführt hat.

(Die Gleichung $y'(x) + y(x)\, p(x) = q(x)$ kann man lösen, indem man mit $\exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right)$ durchmultipliziert und dann löst.)