zu Funktionenfolgen, -Reihen, Potenzreihen

I/ Erinnerung an S.21-26, insbesondere die Sätze 1 (S.24), 3 (S.26), und an den Satz S.36/37

II/ Satz (Vertauschung von lim und Differentiation)

(f_n) sei eine Funktionenfolge, $f_n \in C^1[a,b]$ $\forall n$.
Es sei $\xi \in [a,b]$ beliebig.
Es seien erfüllt:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\xi) =: \alpha$ existiert
2. $f_n' \to g$ $(n\to\infty)$ gleichmäßig auf $[a,b]$.

Dann gelten:
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ existiert für jedes $x \in [a,b]$ und es ist $f \in C^1[a,b]$ und man hat $f'(x) = g(x)$, $a \le x \le b$.

$$\left(\begin{array}{ccc} f'(x) & = & D\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)(x) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ g(x) & = & \lim\limits_{n\to\infty} (Df_n)(x) \end{array} \right)$$

Zum Beweis muss man nur an den Hauptsatz DRIR

$$f_n(x) = f_n(\xi) + \int_\xi^x f_n'(t)\,dt \quad , \quad a \le x \le b \qquad (*)$$

denken und an den Satz S.36/37 über Vertauschbarkeit von lim und $\int$. Aus $(*)$ und den Voraussetzungen folgt mit $\lim\limits_{n\to\infty}$: $\quad f(x) = \alpha + \int_\xi^x g(t)\,dt$, $a \le x \le b$,

wobei $g \in C[a,b]$ nach Satz 1/S.24 gilt.

III/ Anwendung auf Potenzreihen

Durch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ mit Konvergenzradius r wird

die Funktion f auf $|x-x_0|<r$ (auf $I=(x_0-r, x_0+r)$)

definiert: $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, $x \in I$.

Es ist $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ mit $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$.

1. f ist auf I stetig.

Es sei $x \in I$ beliebig. Wähle $\rho < r$ so, dass

$x_0 - r < x_0 - \rho < x < x_0 + \rho < x_0 + r$.

Die Funktionen f_n sind auf $[x_0-\rho, x_0+\rho]$ stetig

und $f_n \to f$ $(n\to\infty)$ gleichmäßig auf $[x_0-\rho, x_0+\rho]$:

Denn $|a_k (x-x_0)^k| \le |a_k| \rho^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \rho^k$ ist

konvergent, wende Satz 3, S. 26, mit $c_k = |a_k|\rho^k$ an.

Nach Satz 1, S. 24, ist f auf $[x_0-\rho, x_0+\rho]$ also in x

stetig. Da $x \in I$ beliebig war, gilt $f \in C(I)$.

2. "Potenzreihen dürfen innerhalb ihres Konvergenzintervalls gliedweise integriert werden":

Für jedes $x_1 \in I$ gilt $\int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{x_0}^{x_1} (t-x_0)^k\,dt$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{k+1} (x_1-x_0)^{k+1}.$$

Wähle wie unter 1. ρ: $x_0 - r < x_0 - \rho < x_1 < x_0 + \rho < x_0 + r$

Für alle x mit $|x-x_0| \le \rho$ gilt $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ gleichmäßig.

Mit dem Satz S. 36/37 folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x_1} f_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{x_0}^{x_1} (t-x_0)^k\,dt \qquad \int_{x_0}^{x_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-x_0)^k\,dt$$

3. "<u>Potenzreihen dürfen innerhalb ihres Konvergenzintervalls gliedweise differenziert werden</u>":

Für $x \in I$ gilt $\quad f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$

$$D(\lim_{n\to\infty} f_n)(x) \qquad \lim_{n\to\infty} D f_n(x)$$

Es sei wieder $\rho < r$. Für $|x-x_0| \le \rho$ konvergieren

f_n und f_n' gleichmäßig. f_n konvergiert gegen f, f_n' gegen g. Nach dem Satz unter II/ gilt

$f'(x) = g(x)$, $|x-x_0| \le \rho$. Dies ist genau das, was oben behauptet wird.

<u>Beispiele</u>: 1) Gesucht ist ein geschlossener Ausdruck

für $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$, $|x|<1$.

Es ist für $|x|<1$ $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x^{n+2})'' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}\right)''$

$$= \left(x^2 \frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

2) gesucht ist ein geschlossener Ausdruck für

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \quad , \quad |x|<1.$$

Es ist für $|x|<1$: $\quad x\left(x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

$$\shortparallel$$

$$x\left(x\left(\frac{1}{1-x}\right)'\right)' = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

3) Begründen Sie, dass durch $x \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{x}{n}$, $x\in[0,1]$, eine C^1-Funktion gegeben wird.