# Algebraische Strukturen: Gruppe, Körper, Vektorraum

## 1. Gruppe

Eine nichtleere Menge $G$ zusammen mit einer Abbildung $*: G \times G \to G$ (eine innere Verknüpfung in $G$) heißt eine Gruppe, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

G1) Für alle $a, b, c \in G$ gilt: $(a*b)*c = a*(b*c)$

G2) In $G$ gibt es ein neutrales Element (Einselement) $e \in G$ mit: $\quad e*a = a \quad$ für alle $a \in G$

G3) Zu jedem Element $a \in G$ gibt es ein inverses Element $a^{-1} \in G$ mit: $\quad a^{-1} * a = e$.

---

Gilt zusätzlich

G4) $\quad a*b = b*a \quad$ für alle $a, b \in G$,

so heißt $G$ abelsche Gruppe.

### Beispiele

1) $\mathbb{R}$, $* = +$, $e = 0$
2) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $* = \cdot$, $e = 1$
3) $G = Bij(M) := \{ f : M \to M \mid f \text{ ist bijektiv} \}$, $* = \circ$, $e = id_M$ (Kap 3, Sätze 1, 2, 3)
4) $G = \{ x \mid x \text{ gerade ganze Zahl} \}$, $* = +$, $e = 0$
5) $G = \{ x \mid x > 0 \}$, $* = \cdot$, $e = 1$

Bemerkung: Für das inverse Element wird in Gruppen mit $* = +$ auch $-a$ anstelle von $a^{-1}$ geschrieben.

Folgerungen aus G1, G2, G3

1) $a * a^{-1} = e$ (Ein Linksinverses (G3) ist auch Rechtsinverses)

2) $a * e = a$ für alle $a \in G$ ("Linkseins = Rechtseins")

3) Für beliebige Elemente $a, b \in G$ sind die Gleichungen $a * x = b$ (für $x$) und $y * a = b$ (für $y$) eindeutig lösbar.
Hieraus folgen z. B.: i) Eine Gruppe besitzt nur ein neutrales Element. ii) Jedes Element besitzt nur ein inverses Element (damit folgt etwa $(a^{-1})^{-1} = a$).

---

2. Körper

Ein Körper $\mathbb{K}$ ist eine nichtleere Menge zusammen mit zwei inneren Verknüpfungen "+" und "·" derart, dass erfüllt sind:

1) $(\mathbb{K}, +, e = 0)$ ist eine abelsche Gruppe
2) $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot, e = 1)$ ist eine abelsche Gruppe
3) Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gelten

$$a(b+c) = (ab) + (ac), \quad (a+b)c = (ac) + (bc).$$

Beispiele: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ mit den üblichen Operationen + und · und den neutralen Elementen 0 und 1 sind Körper.

Der Körper $\mathbb{K}$ heißt durch "<" geordnet, falls erfüllt sind:

(1) $(x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow x < z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$

(2) $(x < y) \wedge (y < x) \Rightarrow x = y$

(3) Für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{K}$ ist genau eine der drei Aussagen erfüllt:

$$x = y, \quad x < y, \quad y < x$$

(4) $x < y \implies x + z < y + z$ für alle $z \in \mathbb{K}$

(5) $(0 < x) \wedge (0 < y) \implies 0 < xy$ $\quad x, y \in \mathbb{K}$

Bemerkungen:

1) Anstelle von $x < y$ wird auch $y > x$ geschrieben.
Es ist $x < 0 \iff -x > 0$.

2) Aus diesen Regeln folgen alle Rechengesetze, die Sie für $\mathbb{R}$ etwa kennen. Beispiele für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$a0 = 0$ für alle $a$

Aus $ab = 0$ folgt: $a = 0$ oder $b = 0$.

$$-(ab) = a(-b) = (-a)b$$

$$(-1)(-1) = 1$$

$$1 > 0$$

$$a > 0 \iff \frac{1}{a} > 0$$

$$a > b > 0 \implies \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$$

$$a \neq 0 \implies aa > 0$$

---

## 3. Vektorraum (linearer Raum) über $\mathbb{K}$

Ein Vektorraum ~~ist~~ ist eine additive abelsche Gruppe $(V, +)$, deren Elemente $x, y, \ldots$ Vektoren heißen, zusammen mit einem Körper $\mathbb{K}$, dessen Elemente $\alpha, \beta, \ldots$ Skalare genannt werden, und einer skalaren Multiplikation $\mathbb{K} \times V \to V$, $(\alpha, x) \to \alpha x$, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$\left.\begin{aligned} 1x &= x \quad , x \in V \\ (\alpha+\beta)x &= \alpha x + \beta x \\ \alpha(x+y) &= \alpha x + \alpha y \\ \alpha(\beta x) &= (\alpha\beta)x \end{aligned}\right\} \text{ für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ x, y \in V.$$

<u>Beispiele</u>

1) $\mathcal{F} := \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \}$ , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

skalare Multiplikation : $(\lambda, f) \to \lambda f \in \mathcal{F}$ mit
$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in [a,b]$

$+$ (Gruppenoperation): $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$
$f, g \in \mathcal{F} \longrightarrow f+g \in \mathcal{F}$ mit $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, $x \in [a,b]$

2) $\mathbb{R}^3 = \{ x \mid x = (x_1, x_2, x_3),\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
mit $\lambda x := (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ , $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$
$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ , $x, y \in \mathbb{R}^3$