1. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Satz: Es sei $k \in \mathbb{N}$. Für beliebige reelle Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$ gilt

$$\sum_{j=1}^{k} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{k} a_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{k} b_j^2\right)^{1/2} \qquad (\mathcal{U})$$

Beweis-Skizze

Setze $\alpha := \left(\sum_{j=1}^{k} a_j^2\right)^{1/2}$, $\beta := \left(\sum_{j=1}^{k} b_j^2\right)^{1/2}$.

Ist $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$, so besagt die behauptete Ungleichung $0 \leq 0$. Es ist also nichts zu beweisen. Im Fall $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ ist $(\mathcal{U})$ äquivalent mit

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{|a_j|}{\alpha} \frac{|b_j|}{\beta} \leq 1 \qquad (\tilde{\mathcal{U}})$$

Verwendet man zur Abschätzung von $\frac{|a_j|}{\alpha} \cdot \frac{|b_j|}{\beta}$ Satz 4, (2), Kapitel 4 für $j = 1, 2, \dots, k$, summiert diese Ungleichungen und verwendet

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j^2}{\alpha^2} = \sum_{j=1}^{k} \frac{b_j^2}{\beta^2} = 1,$$

so hat man $(\mathcal{U})$ in der Form $(\tilde{\mathcal{U}})$ erhalten.

---

2. Die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel (GAM)

Satz Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für beliebige nichtnegative Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ gilt

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \qquad (GAM)$$

Beweis-Skizze

Gilt $x_j = 0$ für ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, so besagt
(GAM) $0 \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$, was wegen $x_\ell \geq 0$
$(\ell = 1, 2, \ldots, n)$ richtig ist.
Es wird also vorausgesetzt $x_\ell > 0$, $\ell = 1, 2, \ldots, n$.
Dann ist (GAM) äquivalent mit
$(\widetilde{GAM})$ $n \leq x_1' + x_2' + \cdots + x_n'$, wobei

$$x_j' := \frac{x_j}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$ gesetzt ist.

Beachtet man $x_1' \cdot x_2' \cdots x_n' = 1$, so hat man (GAM) in der Form $(\widetilde{GAM})$ bewiesen, wenn man die folgende Aussage bewiesen hat:

Für beliebige positive Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_n$, die die Bedingung $y_1 \cdot y_2 \cdots y_n = 1$ erfüllen, gilt

$$n \leq y_1 + y_2 + \cdots + y_n .$$

Dieser Nachweis geschieht mittels vollständiger Induktion.

Anwendung: Die Bernoullische Ungleichung

Für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad (B)$$

Im Fall $1 + nx < 0$ ist wegen $1 + x \geq 0$ und $(1+x)^n \geq 0 > 1 + nx$ nichts zu beweisen.
Im Fall $1 + nx \geq 0$ ist (B) äquivalent mit
$(\widetilde{B})$ $\sqrt[n]{1+nx} \leq 1 + x$ (Ü3, A3c). Setzt man in (GAM)
$x_1 = 1 + nx$, $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 1$, so hat man $(\widetilde{B})$.