I. Eine Anwendung des Vollständigkeitsaxioms (V)

Existenz der n-ten Wurzel

Es seien $a > 0$ und $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben.
Dann gibt es genau eine reelle Zahl $y > 0$, für die $y^n = a$ gilt.

Bew. Skizze

Im Fall $a = 1$ ist $y = 1$.
Im Fall $a > 1$ betrachte $M := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ und } x^n < a\}$.
Es ist $M \neq \emptyset$, da $1 \in M$, und M ist nach oben beschränkt: a ist eine obere Schranke.

Nach (V) existiert $\sup(M) =: y \in \mathbb{R}$. Es gilt $x \leq y$ für alle $x \in M$, also auch $y \geq 1$.
<u>y ist die gesuchte Lösung der Gleichung $y^n = a$.</u>

Denn aus $y^n < a$ folgt, dass es ein $h > 0$ mit $(y+h)^n < a$ gibt. Dies ist wegen $y + h \in M$ und $y < y + h$ ein Widerspruch dagegen, dass y obere Schranke von M ist.
Und mit $y^n > a$ erhält man ein h, $0 < h < 1$, für das $a < (y-h)^n$. Dann würde man, da $y = \sup(M)$ ist, Elemente $x \in M$ mit $a < x^n$ finden. Solche Elemente gibt es nicht. $y^n > a$ tritt also nicht ein.

$\Rightarrow$ $y^n = a$ im Fall $a > 1$.

Falls $a < 1$, so löse die Gleichung $u^n = \frac{1}{a}$ $\left(\frac{1}{a} > 1!\right)$
Für $y := \frac{1}{u}$ gilt dann $y^n = a$.

Dass es nur ein derartiges $y \in \mathbb{R}$ gibt, folgt mit A3/3.ü: Aus $y_1^n = a$ und $y_2^n = a$ folgt
$$y_1^n - y_2^n = 0 = (y_1 - y_2) \sum_{k=0}^{n-1} y_1^{n-1-k} y_2^k \Rightarrow y_1 = y_2.$$

✓

<u>Def</u>: Die für $a \geq 0$ durch den Satz eindeutig bestimmte reelle Zahl $y \geq 0$, die $y^n = a$ erfüllt, heißt <u>die n-te Wurzel von a.</u> Man schreibt $y = \sqrt[n]{a}$.

Ist $a < 0$ und n gerade, so existiert $\sqrt[n]{a}$ nicht.
Ist $a < 0$ und n ungerade, so gilt $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$.

<u>II.</u> Eine Ergänzung zu Satz 13 / Kapitel 4, nach dem es zwischen zwei reellen Zahlen stets eine rationale Zahl gibt.

<u>Folgerung aus Satz 13</u>

Zu $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, gibt es eine Zahl $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x < \xi < y$.

<u>Beweis</u> Wähle gemäß Satz 13 $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, die
$$x < r_1 < r_2 < y$$
erfüllen.

Rechne nach, dass $\xi := r_1 + (r_2 - r_1)\frac{1}{\sqrt{2}}$ die Bedingungen des Satzes erfüllt:
Man sieht $r_1 < \xi < r_2$, also erst recht $x < \xi < y$.
Und wäre ξ rational, so wäre $\sqrt{2}$ rational.

✓