Das Cauchysche Konvergenzkriterium

Definition (Cauchy Folge)

Eine Folge (a_n) heißt Cauchy Folge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > N(\varepsilon)$ gilt.

A1 Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.

Wähle in der Def $\varepsilon = 1$, $m = N(1) + 1$ und $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_m|\} + 1$. Dann gilt $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung und Erinnerung zu Teilfolge einer Folge:

Es sei $(n_j)_j$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $n_1 < n_2 < \ldots$ (n_j streng wachsend). $a_j' := a_{n_j}$. (a_j') ist Teilfolge von (a_n).

Es gilt $n_j \geq j$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

A2 (5. Übblatt, A5)

Aus $a_n \to g$ $(n \to \infty)$ folgt $a_j' \to g$ $(j \to \infty)$ für jede Teilfolge (a_j') von (a_n).

A3 (Satz 2 Vorlesung)

Ist a HP der Folge (a_n), so gibt es eine Teilfolge (a_j') mit $a_j' \to a$ $(j \to \infty)$.

Satz (Satz 1, Satz 2 Vorlesung)

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

<u>Satz</u> (Cauchysches Konvergenzkriterium)

<u>(a_n) ist konvergent $\iff$ (a_n) ist Cauchyfolge</u>

<u>Bew:</u> „$\Rightarrow$" einfach

„$\Leftarrow$" <u>1. Schritt</u>: Mit <u>A1</u> und dem Satz vorher gibt es eine konvergente Teilfolge (a_j'): $a_j' \to a$ $(j \to \infty)$.

<u>2. Schritt</u>: Es gilt $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.

✓

<u>Folgerung</u>: Die Folge (a_n) ist divergent $\iff$ es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$ mit: Zu jedem $N \in \mathbb{N}$ gibt es Indizes $n, m > N$, für die $|a_n - a_m| \geq \varepsilon_0$ gilt.

<u>Beispiel</u>: (a_n), $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (die harmonische Reihe)

ist divergent:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_{2n} - a_n| > \frac{1}{2}$.

<u>Beispiel</u> (a_n) sei eine Folge, die

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \theta\, |a_{n+1} - a_n| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt. Hierbei ist θ eine feste Zahl mit $0 < \theta < 1$.
Zeige, dass die Folge (a_n) konvergent ist.
(Vgl. mit Aufgabe 10 vom 5. Übblatt)