Zur Eulerschen Zahl e

Nach Vorlesung ist e so definiert:

$$e := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

A. Es wird gezeigt, dass $e = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$ gilt.

1. (vgl A9 auf Üblatt 5)

Die Folgen (t_n) : $t_n := (1+\frac{1}{n})^n$, $(\tilde{t}_n)$: $\tilde{t}_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$
bilden eine Intervallschachtelung:
Es gelten: $(t_n)\uparrow$, $(\tilde{t}_n)\downarrow$, $t_n \le \tilde{t}_n$ für alle n
und $\lim_{n\to\infty} |\tilde{t}_n - t_n| = 0$

Mit der GAM-Ungleichung (Hier S.7(8)) erhält man
$t_n = (1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = t_{n+1}$ und $c_n = (1-\frac{1}{n})^n < c_{n+1}$.

($t_n = (1+\frac{1}{n})^n = \underbrace{\underbrace{(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})}_{n \text{ Faktoren}}\cdot 1}_{n+1 \text{ Faktoren}} \underset{\text{GAM}}{<} \left[\frac{1}{n+1}(n+1+n\frac{1}{n})\right]^{n+1} = t_{n+1}$

analog für c_n)

Es ist $\tilde{t}_n = \frac{1}{c_{n+1}}$; da $(c_n)\uparrow \Rightarrow (\tilde{t}_n)\downarrow$.

Aus $t_n < \tilde{t}_n$ für alle n und $(\tilde{t}_n)\downarrow$ folgt
$t_n < \tilde{t}_1 = 4$. Hieraus ergibt sich:

$$0 < \tilde{t}_n - t_n = t_n \frac{1}{n} < 4\frac{1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty}$( ) mit Satz 5/Kap 7: $\lim_{n\to\infty} |\tilde{t}_n - t_n| = 0$

Kap 7

Nach Satz 8 gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $t_n \le t \le \tilde{t}_n$, $n \in \mathbb{N}$

und $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = t$.

2. Es wird gezeigt: $t = e = \lim_{n\to\infty} s_n$ mit $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

2.1 Schreibe t_n mit dem Binomischen Satz (Satz 4 / 5.4 / S.19 || A5 auf dem 4. Übblatt):

$t_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$ und begründe: $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!}$ $(k=0,1,\dots)$

$\Rightarrow$ $t_n < s_n$ $n = 1,2,\dots$ $\underset{\text{Satz 4}}{\overset{\lim_{n\to\infty}}{\Longrightarrow}}$ $t \le e$

2.2 Wähle $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$ beliebig.

Für $n > m$ gilt

$t_n > 1 + 1 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}$ und Satz 4 ergeben: $t \ge s_m$

und hier $\lim_{m\to\infty}$ liefert $t \ge e$

Insgesamt also $t = e$.

B 1) Die Folge (a_n) mit $a_n = \sum_{k=1}^{n} (e - t_k)$ ist divergent.

Schreibt man t_k wie oben mit dem Binomischen Satz um und verwendet $e > s_k$, so erhält man für $k > 2$

$$e - t_k > \sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j!}\Big[1 - \underbrace{(1-\tfrac{1}{k})\underbrace{(1-\tfrac{2}{k})\cdots(1-\tfrac{j-1}{k})}_{<1}}_{<1-\frac{1}{k}}\Big]$$

$$> \frac{1}{k}\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j!} > \frac{1}{2k}$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \sum_{k=1}^{n}(e - t_k) > \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Da $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)_n$ divergent ist (hier S.12 (oder 7.4 (S.29)),

ist (a_n) divergent.

2) <u>Die Folge (b_n) mit $b_n = \sum_{k=0}^{n}(e - s_k)$ ist konvergent</u>

$$0 < e - s_k < \frac{1}{k(k!)} < \frac{1}{k!} \qquad (6.\breve{u}\,/\,A\,8)$$

$\Rightarrow \quad 0 < b_n < e \quad$: (b_n) ist nach oben beschränkt

Da $e - s_k > 0$ für $k \in \mathbb{N}$: $(b_n) \nearrow$

$\Rightarrow$ (b_n) ist konvergent.

<u>C.</u> <u>Zwei Beweise für $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$</u>

(vgl das Vorgehen in der Vorlesung Mo, Di)

1) Mit GAM-Ungleichung:

$$1 \le \sqrt[n]{n} \le \sqrt[n]{\sqrt{n}\sqrt{n}\underbrace{1\cdots 1}_{n-2\text{ Einsen}}} < \frac{1}{n}(2\sqrt{n} + n - 2) \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

✓

2) $\sqrt[n]{n} \geq 1$: $(\sqrt[n]{n})_n$ ist nach unten beschränkt.

$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} \iff n \geq t_n$ (da $t_n < 4$ / 1. oben)

Es gilt für $n \geq 4$: $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$: $(\sqrt[n]{n})_n \downarrow$

$\Rightarrow \underline{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = g}$ existiert.

$\Rightarrow$ (mit A5a) / 5. Üblatt): $\sqrt[2n]{2n} \to g$ $(n \to \infty)$

$\Rightarrow$ (Satz 6 / Kap 7) $\sqrt[n]{2n} \to g^2$

Andererseits wegen $\sqrt[n]{2} \to 1$: $\sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n} \to g$

Da ein Grenzwert einer konvergenten Folge der Folge eindeutig zugeordnet ist: $g^2 = g$ und mit $g \geq 1$ folgt: $\underline{g = 1}$. ✓