Das Cauchy Kriterium für Reihen (vgl. hier S. 11/12)

1. (Erinnerung)

1.1 (a_n) heißt Cauchy Folge, falls erfüllt ist:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n,m\geq N}{\forall}\ |a_n-a_m|<\varepsilon. \qquad (1)$$

(1) ist äquivalent zu:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{m\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{k\in\mathbb{N}}{\forall}\ |a_{m+k}-a_m|<\varepsilon \qquad (2)$$

1.2 Cauchy Konvergenzkriterium für Folgen

(a_n) ist konvergent $\Longleftrightarrow$ (a_n) ist eine Cauchy Folge.

2. Cauchy Kriterium für Reihen

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konvergent

$\Longleftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Zu jedem } \varepsilon>0 \text{ gibt es ein } m\in\mathbb{N} \text{ so, dass} \\ \quad |\sum_{p=1}^{k} a_{m+p}|<\varepsilon \text{ gilt für alle } k\in\mathbb{N}.\end{array}\right\} (3)$$

Zur Begründung: Wende **1.2** auf die Folge der Partialsummen (s_n), $s_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$, in Verbindung mit (2) an.

Hiermit folgt leicht ein Beweis zu Satz 7 der Vorlesung, dass eine absolut konvergente Reihe konvergent ist. Man benötigt die Dreiecksungleichung in der Form:

$$|\sum_{j=1}^{\ell} c_j| \leq \sum_{j=1}^{\ell} |c_j|.$$

Umordnung von Reihen

Eine konvergente Reihe mit der Summe s heißt unbedingt konvergent, wenn jede ihrer Umordnungen konvergiert, und zwar wieder gegen s. Eine konvergente Reihe, die nicht unbedingt konvergiert, heißt bedingt konvergent.

Beispiel: Bezeichnet man den Wert von $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ durch s,

so konvergiert die Umordnung $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}++-$,

falls sie konvergiert, gegen $\frac{3}{2}s$.

Satz 5 (Kap 8)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist unbedingt konvergent.

Zum Beweis

„$\Rightarrow$" Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ mit den Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k'$ eine Umordnung mit den Partialsummen s_n'.

Vorausgesetzt sind: 1. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist konvergent

2. $s_n \to s \quad (n\to\infty)$.

Es ist zu zeigen: $s_n' \to s \quad (n\to\infty)$.

Es sei $\varepsilon>0$ vorgegeben.

Mit 1. und (3)/S.17 bestimme $m\in\mathbb{N}$ so, dass

$$\sum_{p=1}^{k} |a_{m+p}| < \varepsilon \qquad \text{für alle } k\in\mathbb{N}. \qquad (4)$$

Wähle dann N so groß, dass $\{a_1,\dots,a_m\}\subset\{a_1',a_2',\dots,a_N'\}$ erfüllt ist.

Das hat die Konsequenz, dass $s_n' - s_n$ für $n > N$ eine Summe von endlich vielen Gliedern a_n mit $n \geq m+1$ ist.

Nach (4) gilt damit für $n > N$ $|s_n' - s_n| < \varepsilon$.

Dies, kombiniert mit 2., liefert: $s_n' \to s$ wegen:

$$s_n' = s_n + (s_n' - s_n) \to s + 0 \qquad (n \to \infty).$$

"$\Leftarrow$" Ist $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ die Zerlegung in Realteil und Imaginärteil von a_n, so reicht es, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ (eine reelle Reihe) zu betrachten.

Vor: $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ ist unbedingt konvergent

Zu zeigen: $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ ist konvergent.

Beweis (indirekt) Annahme: $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = \infty$

Es wird (unter Verwendung der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$) gezeigt, dass es Umordnungen von $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ gibt, die divergent sind.

1. Schritt: Definiere $p_n := \max\{0, \alpha_n\}$, $q_n := -\min\{0, \alpha_n\}$.

(5) Es gelten: $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \infty$.

(Wäre etwa $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ konvergent, dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ und dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$. Wegen $\alpha_n = p_n - q_n$, $|\alpha_n| = p_n + q_n$)

2. Schritt:

Die Reihe

$$(6) \qquad \sum_{j=1}^{m_1} p_j - q_1 + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} p_j - q_2 + \cdots + \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} p_j - q_k + \cdots$$

ist eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Hierbei ist $m_1 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\sum_{j=1}^{m_1} p_j > 1 + q_1$ ist. Ist m_{k-1} schon gewählt, so ist $m_k \in \mathbb{N}$ so zu wählen, dass $m_k > m_{k-1}$ und $\sum_{j=1}^{m_k} p_j > k + \sum_{j=1}^{k} q_j$ $(k = 1, 2, \ldots)$ erfüllt ist. Wegen (5) ist dies alles möglich.

$\Rightarrow$: Die Partialsummenfolge der Reihe (5) ist nicht beschränkt. Die Reihe (5) ist divergent.

(Ähnliche Argumentation)
Folgerung (Riemannscher Umordnungssatz)
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \in \mathbb{R})$ sei bedingt konvergent und $s' \in \mathbb{R}$ eine beliebige Zahl. Dann gibt es eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n' = s'$.

Literatur zu diesem Abschnitt:

Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 1

Mangoldt, Knopp: Einführung in die Höhere Mathematik, Band 2

Endl, Luh: Analysis II