Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

D sei eine Menge in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$.

$\mathcal{F}(D,\mathbb{C})$ sei die Menge der auf D definierten komplexwertigen Funktionen.

Eine Funktionenfolge (f_n) auf D ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \to \mathcal{F}(D,\mathbb{C}), \quad n \to f_n.$$

Definition 1

$f_n \to f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{C})$ punktweise auf D für $n \to \infty$

$$:\Longleftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{x\in D}{\forall} \ \underset{N=N(\varepsilon,x)\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n\geq N}{\forall} \ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

(Ü: Formuliere diese Zeile in Textform)

Beispiele

1. (Satz 1, §.1) Die Aussage: "für jedes $z\in\mathbb{C}$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k$ absolut" bedeutet mit $s_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{|z|^k}{k!}$

$$s_n \to s \quad \text{punktweise auf } \mathbb{C}.$$

2. $D=\{x \mid 0\leq x\leq 1\}\subset\mathbb{R}$

$$f_n(x)=\begin{cases} nx & 0\leq x\leq \frac{1}{n} \\ 2-nx & \frac{1}{n}<x\leq\frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n}<x\leq 1 \end{cases} \qquad n=2,3,\ldots$$

f_n ist auf $[0,1]$ stetig für jedes $n=2,3,\ldots$

Mit $f(x)=0$, $0\leq x\leq 1$, gilt

$$f_n \to 0 \quad (n\to\infty) \quad \text{punktweise auf } [0,1]$$

(i) Es gilt $f_n(\frac{1}{n})=1$ für $n=2,3,\ldots$

3. $D = [0,1] \subset \mathbb{R}$.

$f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$

Es gilt $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ punktweise auf D

mit $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$.

4. 8. Üblatt Aufgabe 8

und (zur Übung): Untersuche $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+|nx|}$,

$x \in D = \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$.

<u>Definition 2</u>

$f_n, f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ wie oben.

$f_n \to f$ $(n \to \infty)$ <u>gleichmäßig auf D</u>

(2) $\iff \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \ \underset{N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n \ge N}{\forall} \ \underset{x \in D}{\forall} \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

<u>Einschub</u>

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ (S. 5/6 Beispiel 1, S. 6)

Eine Funktion $N: V \to \mathbb{R}^+ (= \{x \mid x \ge 0\})$

heißt <u>Norm auf V</u>, falls erfüllt sind:

(N1) $N(v) \ge 0$ für alle v und $N(v) = 0$ nur für $v = 0$

(N2) $N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in V$

(N3) $N(v + w) \le N(v) + N(w)$ für alle $v, w \in V$.

V mit einer Norm N heißt <u>normierter Vektorraum</u>

Ist (v_n) eine Folge von Elementen aus V so wird definiert: $(v_n \to \underset{\in V}{v} \ (n \to \infty)) \iff \lim\limits_{n \to \infty} N(v_n - v) = 0$.

Beispiele:

1) In $V = \mathbb{C}$ mit $+$ und der üblichen skalaren Multiplikation ist die Betragsfunktion eine Norm. Die Konvergenz in $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist gerade die Folgenkonvergenz der Vorlesung.

2) (1.6) $\mathcal{F}(D,\mathbb{C})$ ist ein Vektorraum, wenn definiert werden: $(f+g)(x) := f(x)+g(x),\ x \in D$

für $f,g \in V$ und $(\lambda f)(x) := \lambda f(x),\ x \in D,\ \lambda \in \mathbb{C}$.

Es sei $V = \mathcal{F}_B(D,\mathbb{C})$ der Raum der beschränkten Funktionen aus $\mathcal{F}(D,\mathbb{C})$ mit obigen Operationen. Auf V wird durch

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|,\ x \in D\}$$

eine Norm definiert (Ü).

Die Konvergenz in diesem normierten Raum ist gerade die oben eingeführte gleichmäßige Konvergenz (2):

$f_n \to f\ (n \to \infty)$ gleichmäßig auf D

(2) $\iff \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$

Bemerkung:

Eine Funktionenfolge aus $\mathcal{F}(D,\mathbb{C})$, die auf D gleichmäßig gegen f konvergiert, konvergiert auf D auch punktweise gegen f. Die Umkehrung gilt nicht: Im Beispiel 2. ist $f=0$ die Grenzfunktion bei punktweiser Konvergenz. Jedoch wegen (1)

hat man $\|f_n - f\|_\infty \geq f_n(\frac{1}{n}) = 1$
und $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ ist nicht erfüllt.

Die Folge f_n konvergiert lediglich punktweise aber nicht gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen $f = 0$.

Satz 1: (f_n) sei eine Folge stetiger Funktionen aus $\mathcal{F}(D,\mathbb{C})$, die auf D gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{C})$ konvergiert. Dann ist f stetig auf D.
(Für punktweise Konvergenz ist diese Aussage i.a. falsch: Beispiel 3. oben. Aus dem Satz folgt auch, dass die Folge aus Beispiel 3. nicht gleichmäßig auf $[0,1]$ konvergiert)

Zur Begründung

Man schreibe auf, was
"f_n auf D stetig für jedes n" genau bedeutet

und ebenso, was
"$f_n \to f$ gleichmäßig" besagt.

Diese Aussagen müssen dann geeignet verknüpft werden.