Zum Beweis von Satz 1:

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in D$ $\underline{(1)}$

(möglich wegen der gleichmäßigen Konvergenz $f_n \to f$)

Es sei $p \in D$ beliebig. f_N ist in p stetig. Deshalb gibt es ein $\delta > 0$ mit: aus $x \in D$ und $|x-p| < \delta$ folgt $|f_N(x) - f_N(p)| < \varepsilon/3$ $\underline{(2)}$

Aus $\underline{(1)}, \underline{(2)}$ folgt für $x \in D$ mit $|x-p| < \delta$:

$$|f(x) - f(p)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(p)| + |f_N(p) - f(p)|$$
$$< \varepsilon/3 \overset{\underline{(1)}}{} + \varepsilon/3 \overset{\underline{(2)}}{} + \varepsilon/3 \overset{\underline{(1)}}{} = \varepsilon$$

<u>Satz 2</u> (<u>Cauchy Kriterium</u>)

Die Funktionenfolge (f_n), $f_n \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$, sei gegeben. Es gilt:

(f_n) ist auf D gleichmäßig konvergent

$\Longleftrightarrow$ (f_n) ist in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm eine Cauchy-Folge

<u>d.h.:</u> Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $j, k \geq N$ $\quad \|f_j - f_k\|_\infty < \varepsilon$ gilt.

zum <u>Beweis</u>: Vergleiche mit dem Satz, S. 12.

Bemerkung zu „$\Leftarrow$": Die Vor $\|f_j - f_k\|_\infty < \varepsilon$ für $j, k \geq N$ besagt, dass die Zahlenfolge $(f_j(x))$ für jedes $x \in D$ eine Cauchy-Folge ist, also einen Grenzwert $f(x)$ besitzt.

Es gilt also $f(x) := \lim_{j \to \infty} f_j(x)$, $x \in D$. Mit der Vor $\|f_j - f_k\|_\infty < \varepsilon$, $j, k \geq N$, sieht man, dass $f_j \to f$ gleichmäßig auf D gilt.

<u>Satz 3</u> (<u>Majorantenkriterium</u>) (vgl. Vorlesung Kap 8 (Satz 6)

Es sind (f_n), $f_n \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$, und die Zahlenfolge (c_n) gegeben.
Es seien erfüllt: 1) $|f_j(x)| \leq c_j \quad \forall j, \forall x \in D$.
2) $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ ist konvergent.

Dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$, d.h. die Folge (s_n), $s_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j(x)$, auf D absolut und gleichmäßig.

<u>Zum Beweis</u>: Es wird verwendet, dass $(\sum_{j=0}^{n} c_j)$ als konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist und dass man („den Cauchy-Abschnitt“) $\sum_{j=1}^{k} |f_{n+j}(x)|$ für alle $x \in D$ durch $\sum_{j=1}^{k} c_{n+j}$ abschätzen kann. Damit hat man mit dem früheren Majoranten-kriterium die absolute Konvergenz für alle $x \in D$ und wegen der x-Unabhängigkeit der Majorante $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ die gleichmäßige Konvergenz.

<u>Beispiele</u>:

1) Es sei ρ eine Zahl mit $0 < \rho < 1$.
Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ auf $D = \{z \mid |z| \leq \rho\}$ gleichmäßig konvergent (setze oben $c_k := \rho^k$)
$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist punktweise aber nicht gleichmäßig konvergent auf $D = \{z \mid |z| < 1\}$.

2) $\sum_{j=0}^{\infty} e^{-jx^2}$ ist auf $D = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$ gleichmäßig konvergent. Als c_j kann $\left(\frac{1}{2}\right)^j$ gewählt werden. (Die Grenzfunktion ist übrigens $\frac{1}{1-e^{-x^2}}$.)

3) Es sei $R > 0$ beliebig, fest. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ absolut und gleichmäßig auf $D = \{z \mid |z| \leq R\}$. Man kann $c_k = \frac{R^k}{k!}$ setzen.