Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Dr. Vu Hoang

Sommersemester 2013
16.04.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Es sei V ein Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

(a) Jede Menge M von Vektoren aus V mit $0 \in M$ ist linear abhängig.

(b) Ist $M := \{v_1, \dots, v_n\}$ linear abhängig, so lässt sich jeder Vektor aus M als Linearkombination der anderen Vektoren aus M darstellen.

(c) Existiert ein $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der $v_1, \dots, v_n$, dann sind die $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

(d) Sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig, und $v \in V$, dann sind $v_1 + v, \dots, v_n + v$ linear unabhängig.

(e) Sind v_1, v_2 linear unabhängig und sind v_1, v_3 linear unabhängig, so sind auch v_2, v_3 linear unabhängig.

Aufgabe 2

Es sei V ein Vektorraum und $x_1, \dots, x_n \in V$. Ferner gelte $x_j \neq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$.

(a) $x_1, \dots, x_n \in V$ seien linear unabhängig. Zeigen Sie: $x \in \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_n)$ gilt genau dann, wenn die Vektoren $x_1, \dots, x_n, x$ linear abhängig sind.

(b) Beweisen Sie: $x_1, \dots, x_n$ sind genau dann linear abhängig, wenn ein x_k $(k = 2, \dots, n)$ existiert mit
$$x_k \in \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_{k-1}).$$

Aufgabe 3

Gegeben seien die Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\vec{x} \times \vec{y}$, $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{x}$, den Winkel, den die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ einschließen, sowie den Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms.

— bitte wenden —

Aufgabe 4

a) Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben. Zeigen Sie:

- **i)** Die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ sind linear abhängig.
- **ii)** Es gibt keine Zahlen $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $\vec{v}_2 = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_3 \vec{v}_3$.

b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

Achtung:

Beachten Sie bitte die Hinweise auf der Seite

www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etec2013s/.

Hinweis Die Löungen zum Übungsblatt werden in den Tutorien besprochen.