

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen
Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive
Komplexe Analysis und Integraltransformationen**

2. Übungsblatt

Aufgabe 5

(a) Hierbei ist zu beachten, dass die durch die Matrix A vermittelte lineare Abbildung durch Ihre Wirkung auf die Basisvektoren (hier die kanonische Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) bestimmt wird.

(i) Die Spiegelung an der (x_1, x_2) -Ebene bildet die Vektoren \vec{e}_1, \vec{e}_2 jeweils auf sich selber ab, und \vec{e}_3 wird auf $-\vec{e}_3$ geschickt. Also:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Bei der Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden haben wir $A\vec{e}_1 = \vec{e}_2$ sowie $A\vec{e}_2 = \vec{e}_1$. Also:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) Hier ist $A\vec{e}_1 = \cos(\phi)\vec{e}_1 + \sin(\phi)\vec{e}_2$, $A\vec{e}_2 = -\sin(\phi)\vec{e}_1 + \cos(\phi)\vec{e}_2$ (Bild!). $\phi > 0$ bedeutet in dieser Schreibweise eine Drehung im mathematisch positiven Sinn (entgegen dem Uhrzeigersinn). Also:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

(b) Vorüberlegung: aufgrund der Definition der Matrixmultiplikation reicht es, eine Matrix Z zu finden, welche die j -te Komponente x_j eines Spaltenvektors $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ durch $x_j + \alpha x_k$ ersetzt. Man sieht leicht, dass die folgende Matrix

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \dots & \alpha \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

das gewünschte leistet (in der j -ten Zeile steht in der j -ten Spalte eine 1 und in der k -ten Spalte α).

Aufgabe 6

- (a) Zunächst sei f ein Isomorphismus. Wir müssen also zeigen, dass $f(v_1), \dots, f(v_n)$ eine Basis von W bildet. Zunächst die lineare Unabhängigkeit: aus

$$0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j f(v_j)$$

folgt $0 = f(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j)$ (f linear!). f ist injektiv, daher folgt $0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$. Da die v_j eine Basis bilden, haben wir $\alpha_j = 0$ ($j = 1, \dots, n$).

Es bleibt noch zu zeigen, dass $W = \text{Lin}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ gilt. Es sei $y \in W$ beliebig, aber fest, gegeben. f ist als Isomorphismus vorausgesetzt, also insbesondere surjektiv; demzufolge existiert ein $x \in V$ mit $f(x) = y$. x kann aber in der Basis v_1, \dots, v_n geschrieben werden:

$$x = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \quad (*)$$

Die Anwendung von f auf die Gleichung $(*)$ liefert nun

$$y = f(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j f(v_j),$$

also die gewünschte Darstellung von y mittels der Vektoren $f(v_1), \dots, f(v_n)$.

Nun betrachten wir die andere Richtung: es sei vorausgesetzt, dass $f(v_1), \dots, f(v_n)$ eine Basis von W bildet. Zu zeigen ist: f ist bijektiv, also surjektiv und injektiv. Ist $x = \sum_j \alpha_j v_j$ und $f(x) = 0$, so folgt in vertrauter Weise durch Einsetzen $0 = \sum_j \alpha_j f(v_j)$, also $x = 0$. Die Surjektivität wird analog gezeigt, indem jedes $y \in W$ in der Basis $f(v_1), \dots, f(v_n)$ geschrieben wird.

- (b) Hierzu bemerkt man, dass ϕ den j -ten Basisvektor v_j auf \vec{e}_j abbildet. Da $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ eine Basis von C^n bildet, liefert die Anwendung des Aufgabenteils (a) die gewünschte Aussage.

Aufgabe 7

Wiederholung des Gram-Schmidt-Verfahrens:

In einem unitären Vektorraum V seien n linear unabhängige Vektoren x_1, \dots, x_n gegeben. Wir wollen ein Orthonormalsystem $u_1, \dots, u_n \in V$ so konstruieren, dass $\text{Lin}(x_1, \dots, x_j) = \text{Lin}(u_1, \dots, u_j)$ für alle $j = 1, \dots, n$ gilt.

Wir bestimmen zunächst nur ein Orthogonalsystem v_1, \dots, v_n mit der Eigenschaft $\text{Lin}(x_1, \dots, x_j) = \text{Lin}(v_1, \dots, v_j)$. (Bei einem Orthogonalsystem wird nur verlangt, dass die Vektoren orthogonal zueinander sind, nicht aber, dass sie Norm 1 haben.) Die Forderung $\text{Lin}(x_1) = \text{Lin}(v_1)$ können wir erfüllen, indem wir $v_1 := x_1$ setzen. Dann geht unser Verfahren rekursiv weiter: Haben wir für ein gewisses j ein Orthogonalsystem v_1, \dots, v_j mit $\text{Lin}(x_1, \dots, x_j) = \text{Lin}(v_1, \dots, v_j)$ gefunden, so ist die Frage, wie wir v_{j+1} definieren sollen. Setzen wir

$$v_{j+1} := x_{j+1} + \sum_{k=1}^j \lambda_k v_k$$

mit gewissen $\lambda_k \in \mathbb{C}$, so ist die Forderung $\text{Lin}(x_1, \dots, x_{j+1}) = \text{Lin}(v_1, \dots, v_{j+1})$ erfüllt, da wir ja $L(x_1, \dots, x_j) = L(v_1, \dots, v_j)$ voraussetzen. Damit dieses v_{j+1} zusätzlich orthogonal zu

allen v_i mit $i \in \{1, \dots, j\}$ ist, muss

$$0 = \langle v_{j+1}, v_i \rangle = \langle x_{j+1}, v_i \rangle + \sum_{k=1}^j \lambda_k \langle v_k, v_i \rangle = \langle x_{j+1}, v_i \rangle + \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle$$

für alle $i \in \{1, \dots, j\}$ gelten. Folglich wählen wir

$$\lambda_i := -\frac{\langle x_{j+1}, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = -\frac{\langle x_{j+1}, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}.$$

Fassen wir zusammen: Die Vektoren v_1, \dots, v_n werden rekursiv definiert durch

$$v_1 := x_1, \quad v_{j+1} := x_{j+1} - \sum_{k=1}^j \frac{\langle x_{j+1}, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k \quad (j = 1, \dots, n-1).$$

Man beachte: Die Vektoren x_1, \dots, x_n sind nach Voraussetzung linear unabhängig; daher gilt $x_1 \neq 0$ und $x_{j+1} \notin \text{Lin}(x_1, \dots, x_j) = \text{Lin}(v_1, \dots, v_j)$ für $j = 1, \dots, n-1$, und damit folgt $v_j \neq 0$ für alle j . Somit ist die Division durch $\|v_k\|^2$ möglich.

Setzen wir nun noch $u_j := v_j / \|v_j\|$, so haben wir das gesuchte Orthonormalsystem.

- a) Man sieht leicht, dass die gegebenen Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ linear unabhängig sind (Wie geht das genau?). Es gilt

$$\vec{v}_1 := \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_1 := \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und wegen

$$\langle \vec{x}_2, \vec{v}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \cdot \bar{1} + 2i \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{1} = 2$$

erhalten wir

$$\vec{v}_2 := \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2, \vec{v}_1 \rangle}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 := \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(Beachte: Es gilt $\|\vec{v}_2\| = (|1|^2 + |2i|^2 + |-1|^2)^{1/2} = \sqrt{6}$.) Für die Berechnung von \vec{v}_3 brauchen wir die Skalarprodukte

$$\langle \vec{x}_3, \vec{v}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 \cdot \bar{1} + 3i \cdot \bar{0} + 1 \cdot \bar{1} = 6,$$

$$\langle \vec{x}_3, \vec{v}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 \cdot \bar{1} + 3i \cdot \bar{2i} + 1 \cdot \overline{-1} = 5 - 6i^2 - 1 = 10.$$

Damit ergibt sich dann

$$\vec{v}_3 := \vec{x}_3 - \sum_{k=1}^2 \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{v}_k \rangle}{\|\vec{v}_k\|^2} \vec{v}_k = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{u}_3 := \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- b) Wir wollen das Verfahren von Gram-Schmidt benutzen. Dazu prüfen wir zuerst die gegebenen Vektoren $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$ auf lineare Unabhängigkeit. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ mit

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} \alpha + 5\beta - 3\gamma = 0 & (1) \\ -\alpha + \beta - 3\gamma = 0 & (2) \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 & (3) \\ -\alpha + \beta - 3\gamma = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + 5\beta - 3\gamma = 0 & (1) \\ 6\beta - 6\gamma = 0 & (1) + (2) \\ 4\beta - 4\gamma = 0 & (1) - (3) \\ 0 = 0 & (4) - (2) \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + 5\beta - 3\gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Somit sind die Vektoren $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$ linear abhängig, etwa $-2\vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \vec{y}_3 = \vec{0}$. Insbesondere ist $\vec{y}_3 = 2\vec{y}_1 - \vec{y}_2 \in \text{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$, woraus $\text{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3) = \text{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ folgt. Der obigen Rechnung können wir auch entnehmen, dass \vec{y}_1, \vec{y}_2 linear unabhängig sind (Nehme anfangs $\gamma = 0$). Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $\text{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ führen wir nun das Verfahren von Gram-Schmidt durch:

$$\vec{v}_1 := \vec{y}_1, \quad \vec{u}_1 := \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{\vec{v}_1}{\sqrt{1+1+1+1}} = \frac{1}{2}\vec{y}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Den zweiten Vektor setzen wir $\vec{v}_2 := \vec{y}_2 - a\vec{u}_1$ mit $a = \langle \vec{y}_2, \vec{u}_1 \rangle = \frac{1}{2}(5 - 1 + 1 - 1) = 2$. Also

$$\vec{v}_2 := \vec{y}_2 - 2\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 := \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist (\vec{u}_1, \vec{u}_2) eine Orthonormalbasis von $\text{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \text{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$.

Aufgabe 8

- a) Der Nullvektor in $C^0([0, 1])$ ist die Nullfunktion $n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto 0$. Die Funktionen f, g, h sind genau dann linear unabhängig, wenn aus $\alpha f + \beta g + \gamma h = n$ stets $\alpha = \beta = \gamma = 0$ folgt, also wenn aus $\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$ stets $\alpha = \beta = \gamma = 0$ folgt.

Seien also $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ mit $\alpha \cdot 2 + \beta(x - 1) + \gamma(x^2 + 3x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$, d.h. $(2\alpha - \beta) + (\beta + 3\gamma)x + \gamma x^2 = 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Sind $p_k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto x^k$ für $k = 0, 1, 2$ definiert, so lässt sich dies schreiben als $(2\alpha - \beta)p_0 + (\beta + 3\gamma)p_1 + \gamma p_2 = n$. Da die Monome p_0, p_1, p_2 in $C^0([0, 1])$ linear unabhängig sind, kann man den Nullvektor, d.h. die Nullfunktion n , nur als triviale Linearkombination von p_0, p_1, p_2 schreiben, so dass $2\alpha - \beta = \beta + 3\gamma = \gamma = 0$ folgt. Hieraus ergibt sich sofort $\gamma = 0$ und daher $\beta + 3 \cdot 0 = 0$, also $\beta = 0$, was schließlich auf $\alpha = 0$ führt. Damit ist die lineare Unabhängigkeit von f, g, h gezeigt.

- b) (f, g, h) bildet eine Basis von $P_2([0, 1]) = \text{Lin}(p_0, p_1, p_2)$, weil $\dim P_2([0, 1]) = 3$ ist und die drei Vektoren $f, g, h \in P_2([0, 1])$ linear unabhängig sind.

- c) Für jedes $x \in [0, 1]$ gilt $p(x) = 8x^2 + 2x + 2 = 8(x^2 + 3x) - 22x + 2 = 8h(x) - 22(x - 1) - 20 = 8h(x) - 22g(x) - 10f(x)$. Daher ist $p = 8h - 22g - 10f$, so dass die Koordinaten von p bzgl. der Basis (f, g, h) durch $(-10, -22, 8)$ gegeben sind.

Dafür ist auch die Notation $\begin{pmatrix} -10 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}_{(f,g,h)}$ gebräuchlich.

Bemerkung: Die Reihenfolge der Basiselemente ist bei der Angabe der Koordinaten von entscheidender Bedeutung. So lauten beispielsweise die Koordinaten von p bzgl. der Basis (g, h, f) : $(-22, 8, -10)$.