Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Dr. Vu Hoang

Sommersemester 2013
6.06.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

8. Übungsblatt

Aufgabe 33

Bestimmen Sie jeweils alle Stellen lokaler Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maximal- oder Minimalstellen handelt.

a) $f(x,y) = xy + x - 2y - 2$

b) $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$

c) $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

Aufgabe 34

Durch
$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 8xy + 7y^2 = 225\}$$
ist in der (x,y)-Ebene eine Hyperbel gegeben. Bestimmen Sie den Abstand von der Hyperbel zum Ursprung, d.h.
$$\sqrt{\min\{x^2 + y^2 : (x,y) \in H\}}.$$
Sie dürfen dabei ohne Beweis annehmen, dass das Minimum an einem Punkt von H angenommen wird.

Aufgabe 35

Berechnen Sie die globalen Extrema von
$$f(x,y,z) := 5x + y - 3z$$
auf der Menge $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\}$.

Aufgabe 36

Die Funktion $\vec{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch
$$\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} \cosh x \, \cos y \\ \sinh x \, \sin y \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung U von $(\ln 2, \frac{\pi}{2})$ und eine Umgebung V von $(0, \frac{3}{4})$ so, dass U durch die Funktion $\vec{g}$ bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(0, \frac{3}{4})$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\vec{g}$ in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist, dass aber $\vec{g}$ nicht injektiv ist.

— bitte wenden —

Aufgabe 37

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3 = 0$ in einer Umgebung von $(0, 0, -2)$ nach z aufgelöst werden kann. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g(x, y)$ die Ableitung $g'(x, y)$.

b) Betrachten Sie die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1.$$

Zeigen Sie: Durch diese Gleichungen werden in einer Umgebung des Punktes $(0, 0)$ zwei C^1-Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ mit $u(0, 0) = v(0, 0) = 1$ implizit definiert.

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung dieser Funktionen in $(0, 0)$.