Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Dr. Vu Hoang

Sommersemester 2013
13.06.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

9. Übungsblatt

Aufgabe 38

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} (xy + y^2)\, d(x,y)$ **b)** $\displaystyle\iint\limits_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x+y)\, d(x,y)$

Aufgabe 39

Skizzieren Sie jeweils die Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ und berechnen Sie den Flächeninhalt $\iint\limits_B d(x,y)$.

a) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{4}x^2 - 1 < y < 2 - x\right\}$

b) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y > 0,\ y^2 < x < 4 - y^2\right\}$

Aufgabe 40

a) Die Kurve γ sei gegeben durch die Parametrisierung

$$\vec{r}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (t\cos t, t\sin t, t)\,.$$

Berechnen Sie

$$\int_\gamma f\, ds \qquad \text{für} \quad f(x,y,z) = 2z - \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

b) Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s}$$

für die durch die Parametrisierung $\vec{r}$ gegebene Kurve γ.

i) $\vec{v}(x,y) = (e^x, xy)\,, \qquad \vec{r}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos t, \sin t)$

ii) $\vec{v}(x,y,z) = (y, -z, x)\,, \qquad \vec{r}\colon [0,\ln 2] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\sinh t, \cosh t, \sinh t)$

iii) $\vec{v}(x,y) = (\sin x, x^2+y^2)\,, \qquad \vec{r}\colon [0,2] \mapsto \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{cases} (t,0)\,, & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ (1,t-1)\,, & 1 < t \leqslant 2 \end{cases}$

— bitte wenden —

Aufgabe 41

Es sei γ der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Das Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ x^2 y - y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\displaystyle\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ zunächst direkt und anschließend mit dem Gaußschen Integralsatz.

Aufgabe 42

Berechnen Sie unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$\iint\limits_G (x^2 + y)\, d(x,y)\,, \qquad \text{wobei } G := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\big\}\,.$$

Aufgabe 43

Die Vektorfelder $\vec{v}, \vec{w}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2z^3yx \\ 2y + z^3x^2 \\ y^2 + 3z^2yx^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{w}(x,y,z) := \begin{pmatrix} z^2 \\ e^z \\ ye^z + 2xz \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie jeweils, ob es sich um ein Potentialfeld handelt, und bestimmen Sie gegebenenfalls ein zugehöriges Potential.

b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} \qquad \text{und} \qquad \int_\gamma \vec{w} \cdot d\vec{s},$$

wobei γ durch die Parametrisierung $\vec{r}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (1-t, t, 0)$ gegeben ist.

— bitte wenden —