Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Dr. Vu Hoang

Sommersemester 2013
13.06.2013

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

9. Übungsblatt

Aufgabe 38

Offenbar ist der Integrand jeweils eine stetige Funktion; wir können daher die Integrale mit Hilfe von Satz 1 aus 35.3 berechnen.

a) Es gilt

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} (xy+y^2)\,d(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 (xy+y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}xy^2 + \tfrac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^1 dx$$
$$= \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}\right) dx = \left[\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{3}x\right]_0^1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{12}\,.$$

b) Diesmal ergibt sich

$$\iint\limits_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x+y)\,d(x,y) = \int_{-1}^0 \int_0^2 \cosh(2x+y)\,dy\,dx = \int_{-1}^0 \left[\sinh(2x+y)\right]_{y=0}^2 dx$$
$$= \int_{-1}^0 \big(\sinh(2x+2) - \sinh(2x)\big)\,dx = \left[\tfrac{1}{2}\cosh(2x+2) - \tfrac{1}{2}\cosh(2x)\right]_{-1}^0$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}\cosh 2 - \tfrac{1}{2}\cosh 0\right) - \left(\tfrac{1}{2}\cosh 0 - \tfrac{1}{2}\cosh(-2)\right) = \cosh 2 - 1 = \tfrac{1}{2}(e^2+e^{-2}) - 1\,.$$

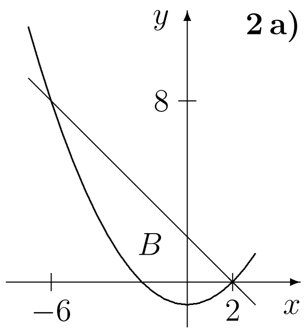
Aufgabe 39

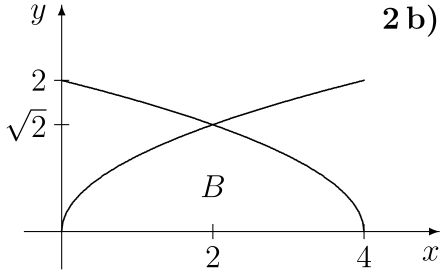
a) Wir bestimmen die Schnittpunkte der beiden Kurven $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ und $y = 2 - x$. Dazu müssen wir die Lösungen der Gleichung $\frac{1}{4}x^2 - 1 = 2 - x$, also $x^2 + 4x - 12 = 0$ bestimmen. Dies sind $x_1 = -6$ und $x_2 = 2$ (siehe auch Skizze). Für den Flächeninhalt von B ergibt sich

$$\iint\limits_B d(x,y) = \int_{-6}^2 \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} dy\,dx = \int_{-6}^2 \big((2-x) - (\tfrac{1}{4}x^2 - 1)\big)\,dx = \int_{-6}^2 \left(-\tfrac{1}{4}x^2 - x + 3\right) dx$$
$$= \left[-\tfrac{1}{12}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-6}^2 = -\tfrac{2}{3} - 2 + 6 - (18 - 18 - 18) = \tfrac{64}{3}\,.$$

b) Hier schneiden wir die Kurven $x = y^2$ und $x = 4 - y^2$. Dies liefert die Gleichung $y^2 = 4 - y^2$, also $y^2 = 2$. Wegen $y > 0$ interessiert nur die Lösung $y = \sqrt{2}$ (siehe Skizze). Es gilt

$$\iint\limits_B d(x,y) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^{4-y^2} dx\,dy = \int_0^{\sqrt{2}} \big((4-y^2)-y^2\big)\,dy = \left[4y - \tfrac{2}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - \tfrac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} = \tfrac{8}{3}\sqrt{2}\,.$$





Aufgabe 40

a) Mit $\vec{r}\,'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$ ergibt sich für jedes $t \in [0, 2\pi]$

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}$$
$$= \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t + 1} = \sqrt{2 + t^2}\,.$$

Nach Definition des Kurvenintegrals ist dann

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^{2\pi} f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}\,'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \Big(2t - \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\Big)\sqrt{2+t^2}\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\, dt = \Big[\tfrac{1}{3}(2+t^2)^{3/2}\Big]_0^{2\pi} = \tfrac{1}{3}\big((2+4\pi^2)^{3/2} - 2^{3/2}\big)$$
$$= \tfrac{2}{3}\sqrt{2}\big((1+2\pi^2)^{3/2} - 1\big)\,.$$

b) **i)** Definitionsgemäß ist

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} e^{\cos t} \\ \cos t\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-e^{\cos t}\sin t + \sin t\cos^2 t)\, dt = \Big[e^{\cos t} - \tfrac{1}{3}\cos^3 t\Big]_{t=0}^{2\pi} = 0\,.$$

ii) Wir benutzen wieder die Definition des Kurvenintegrals:

$$\int_{\tilde{\gamma}} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{\ln 2} \vec{v}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\, dt = \int_0^{\ln 2} \begin{pmatrix} \cosh t \\ -\sinh t \\ \sinh t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{\ln 2} (\cosh^2 t - \sinh^2 t + \sinh t\cosh t)\, dt = \int_0^{\ln 2} (1 + \sinh t\cosh t)\, dt$$
$$= \ln 2 + \Big[\tfrac{1}{2}\sinh^2 t\Big]_0^{\ln 2} = \ln 2 + \tfrac{1}{2}\sinh^2(\ln 2) = \ln 2 + \tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2})\Big)^2 = \ln 2 + \tfrac{9}{32}\,.$$

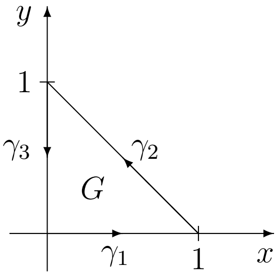
iii) Die Kurven $\vec{r}_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{r}_1(t) = (t, 0)$, und $\vec{r}_2\colon [1,2] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{r}_2(t) = (1, t-1)$, sind regulär mit $\vec{r}_1(1) = \vec{r}_2(1)$. Somit liegt die Situation aus Bemerkung 4 in 36.1 vor:

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\vec{r}_1(t))\cdot\vec{r}_1'(t)\, dt + \int_1^2 \vec{v}(\vec{r}_2(t))\cdot\vec{r}_2'(t)\, dt$$
$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_1^2 \begin{pmatrix} \sin 1 \\ 1 + (t-1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^1 \sin t\, dt + \int_1^2 \big(1 + (t-1)^2\big)\, dt = \Big[-\cos t\Big]_0^1 + \Big[t + \tfrac{1}{3}(t-1)^3\Big]_1^2$$
$$= (-\cos 1 + 1) + (2 + \tfrac{1}{3} - 1) = \tfrac{7}{3} - \cos 1\,.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 41

Zunächst berechnen wir $\displaystyle\oint_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s}$ direkt mittels der Definition des Kurvenintegrals:



Definiere die regulären Kurven $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\vec{r}_1(t) = (t, 0)\,, \qquad \vec{r}_2(t) = (1-t, t)\,, \qquad \vec{r}_3(t) = (0, 1-t)\,.$$

Dann ist $\vec{r}_k$ eine Parametrisierung von γ_k (für $k = 1,2,3$) und es gilt $\vec{r}_1(1) = (1,0) = \vec{r}_2(0)$, $\vec{r}_2(1) = (0,1) = \vec{r}_3(0)$ sowie $\vec{r}_3(1) = (0,0) = \vec{r}_1(0)$. Da der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ durch $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ gegeben ist, erhält man

$$\oint_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_3} \vec{v}\cdot d\vec{s}\,.$$

Für die drei Kurvenintegrale auf der rechten Seite ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\vec{r}_1(t))\cdot \vec{r}_1{}'(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 + t\cdot 0 \\ t^2\cdot 0 - 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,dt = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}\,,$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^2 + (1-t)t \\ (1-t)^2 t - t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t \\ t - 3t^2 + t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\,dt \\ &= \int_0^1 t^3 - 3t^2 + 2t - 1\,dt = \Big[\frac{1}{4}\,t^4 - t^3 + t^2 - t\Big]_0^1 = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

und

$$\int_{\gamma_3} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 + 0\cdot(1-t) \\ 0\cdot(1-t) - (1-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\,dt = \int_0^1 (1-t)^2\,dt = \Big[-\frac{1}{3}\,(1-t)^3\Big]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Zusammen folgt

$$\oint_{\vec{\gamma}} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,.$$

Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene lässt sich das Kurvenintegral folgendermaßen ausrechnen:
$G \subset \mathbb{R}^2$ sei das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Dann ist G ein beschränktes Gebiet, das gleichzeitig vom Typ $G^{(x)}$ und Typ $G^{(y)}$ ist. Es seien $v_1(x,y) := x^2 + xy$ sowie $v_2(x,y) := x^2 y - y^2$ gesetzt. Offenbar ist $\vec{v} = (v_1, v_2)$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und γ stückweise glatt, so dass die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene erfüllt sind. Dieser liefert

$$\oint_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \iint_G \big(D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y)\big)\,d(x,y) = \iint_G (2xy - x)\,d(x,y)\,.$$

Da der Integrand stetig ist, gilt

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (2xy - x)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy^2 - xy \right]_{y=0}^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left(x(1-x)^2 - x(1-x) \right) dx = \int_0^1 \left(x^3 - x^2 \right) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 42

Setzen wir $\vec{v}(x,y) := (v_1(x,y), v_2(x,y))$ mit $v_1(x,y) := -x^2 y$ und $v_2(x,y) := xy$, dann ist $\vec{v}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und es gilt $D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y) = y + x^2$. Der Gaußsche Integralsatz liefert

$$
\iint\limits_G (x^2 + y)\, d(x,y) = \iint\limits_G \left(D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y) \right) d(x,y) = \oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s}\,.
$$

Der positiv orientierte Rand ∂G der offenen Einheitskreisscheibe G ist gegeben durch die reguläre Kurve $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ mit $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Folglich ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_G (x^2 + y)\, d(x,y) &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos^2 t \, \sin t \\ \cos t \, \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t \, \sin^2 t + \sin t \cos^2 t \right) dt \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{4} \sin^2(2t)\, dt + \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t \, dt \\
&= \tfrac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\, dt - \left[\tfrac{1}{3} \cos^3 t \right]_{t=0}^{2\pi} \overset{(**)}{=} \tfrac{1}{8} \int_0^{4\pi} \sin^2(u)\, du \overset{(***)}{=} \tfrac{1}{8} \cdot 2\pi = \tfrac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Hierbei verwendeten wir in $(*)$ das Additionstheorem des Sinus $2 \sin t \cos t = \sin(2t)$, in $(**)$ die Substitution $u = 2t$ und in $(***)$ die Identität $\int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du = \pi$. Letztere kann man z.B. mit Hilfe von partieller Integration zeigen oder auch folgendermaßen einsehen: Zuerst bemerken wir $\int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du = \int_0^{2\pi} \cos^2(u)\, du$. In der Tat ist aufgrund der 2π-Periodizität von cos

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du &\overset{\text{Subst. } t = u - \frac{\pi}{2}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sin^2(t + \tfrac{\pi}{2})\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2(t)\, dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2(t)\, dt + \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2(t)\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2(t + 2\pi)\, dt + \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2(t)\, dt \\
&\overset{\text{Subst. } v = t + 2\pi}{=} \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos^2(v)\, dv + \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt.
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du + \int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du \right) = \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du + \int_0^{2\pi} \cos^2(u)\, du \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\sin^2(u) + \cos^2(u) \right) du = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 \, du = \pi.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 43

a) Die Funktionen $\vec{v}$, $\vec{w}$ sind stetig differenzierbar und auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, gilt: Es handelt sich genau dann um ein Potentialfeld, wenn die

Integrabilitätsbedingung erfüllt ist. Im $\mathbb{R}^3$ ist dies äquivalent dazu, dass die Rotation verschwindet. (vgl. Satz 4 in 38.3) Schreibe $\vec{v} =: (v_1, v_2, v_3)$. Wegen

$$D_2 v_3(x,y,z) = 2y + 3z^2x^2\,, \qquad D_3 v_2(x,y,z) = 3z^2x^2 \neq D_2 v_3(x,y,z)$$

ist $\nabla \times \vec{v} \neq \vec{0}$. Also ist $\vec{v}$ kein Potentialfeld, d.h. es gibt kein C^1-Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \nabla f$.

Für $\vec{w} =: (w_1, w_2, w_3)$ hingegen gilt

$$D_2 w_3 = e^z = D_3 w_2\,, \qquad D_3 w_1 = 2z = D_1 w_3\,, \qquad D_1 w_2 = 0 = D_2 w_1\,.$$

Somit ist $\vec{w}$ ein Potentialfeld, besitzt also ein Potential $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Für dieses Potential muss $\partial_x f(x,y,z) = z^2$ gelten. Integrieren bezüglich x liefert:

$$f(x,y,z) = z^2x + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (Die „Integrationskonstante“ kann also noch von y und z abhängen.) Es folgt $\partial_y f(x,y,z) = \partial_y c(y,z)$, und dies soll $= e^z$ sein. Daher haben wir $c(y,z) = ye^z + d(z)$ mit einer gewissen Funktion $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir wissen also

$$f(x,y,z) = z^2x + ye^z + d(z)\,,$$

und hieraus folgt $\partial_z f(x,y,z) = 2zx + ye^z + d'(z)$. Damit dies gleich der dritten Komponente von $\vec{w}$ wird, muss $d' = 0$ gelten. Wir wählen $d = 0$ und haben ein Potential von $\vec{w}$:

$$f(x,y,z) = z^2x + ye^z\,.$$

b) Bei $\vec{v}$ rechnen wir das Kurvenintegral anhand der Definition aus:

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}\big(\vec{r}(t)\big)\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \Big[-\tfrac{1}{3}t^3 + t^2\Big]_0^1 = \tfrac{2}{3}\,.$$

Bei $\vec{w}$ dagegen können wir auf das oben bestimmte Potential f zurückgreifen:

$$\int_\gamma \vec{w}\cdot d\vec{s} = f\big(\vec{r}(1)\big) - f\big(\vec{r}(0)\big) = f(0,1,0) - f(1,0,0) = 1 - 0 = 1\,.$$

— bitte wenden —