

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen  
Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive  
Komplexe Analysis und Integraltransformationen**

**11. Übungsblatt**

**Aufgabe 50**

$\tilde{u}, \tilde{v}$  sind durch

$$\tilde{u}(r, \phi) = u(r \cos \phi, r \sin \phi), \quad \tilde{v}(r, \phi) = v(r \cos \phi, r \sin \phi)$$

definiert,  $(r, \phi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ . Man beachte, dass  $\tilde{u}, \tilde{v}$   $2\pi$ -periodisch in  $\phi$  sind, d.h.

$$\tilde{u}(r, \phi + 2\pi) = \tilde{u}(r, \phi), \quad \tilde{v}(r, \phi + 2\pi) = \tilde{v}(r, \phi).$$

Wir differenzieren nun  $\tilde{u}, \tilde{v}$  nach der Kettenregel nach  $r$  bzw.  $\phi$  und erhalten ( $D_1 = D_r, D_2 = D_\phi$ )

$$\begin{aligned} D_r \tilde{u}(r, \phi) &= \cos \phi D_x u(r \cos \phi, r \sin \phi) + \sin \phi D_y u(r \cos \phi, r \sin \phi) \\ D_\phi \tilde{v}(r, \phi) &= -r \sin \phi D_x v(r \cos \phi, r \sin \phi) + r \cos \phi D_y v(r \cos \phi, r \sin \phi) \end{aligned}$$

$(u, v)$  genügen den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, also gilt  $D_x u(x, y) = D_y v(x, y)$  sowie  $D_y u(x, y) = -D_x v(x, y)$ . Aus der obigen Rechnung folgt also

$$\begin{aligned} r D_r \tilde{u}(r, \phi) &= r \cos \phi D_x u(r \cos \phi, r \sin \phi) + r \sin \phi D_y u(r \cos \phi, r \sin \phi) \\ &= r \cos \phi D_y v(r \cos \phi, r \sin \phi) - r \sin \phi D_x v(r \cos \phi, r \sin \phi) \\ &= D_\phi \tilde{v}(r, \phi), \end{aligned}$$

also die erste der zu beweisenden Gleichungen. Analog berechnen wir

$$\begin{aligned} D_\phi \tilde{u}(r, \phi) &= -r \sin \phi D_x u(r \cos \phi, r \sin \phi) + r \cos \phi D_y u(r \cos \phi, r \sin \phi) \\ D_r \tilde{v}(r, \phi) &= \cos \phi D_x v(r \cos \phi, r \sin \phi) + \sin \phi D_y v(r \cos \phi, r \sin \phi) \end{aligned}$$

woraus sich

$$\begin{aligned} D_\phi \tilde{u}(r, \phi) &= -r \sin \phi D_x u(r \cos \phi, r \sin \phi) + r \cos \phi D_y u(r \cos \phi, r \sin \phi) \\ &= -r \sin \phi D_y v(r \cos \phi, r \sin \phi) - r \cos \phi D_x v(r \cos \phi, r \sin \phi) \\ &= -r D_r \tilde{v}(r, \phi) \end{aligned}$$

ergibt. Insgesamt gelten also für  $(r, \phi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$  die *Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen* in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} r D_r \tilde{u}(r, \phi) &= D_\phi \tilde{v}(r, \phi) \\ D_\phi \tilde{u}(r, \phi) &= -r D_r \tilde{v}(r, \phi) \end{aligned}$$

## Aufgabe 51

- a) Die Funktionen  $u(x, y) := \sin x \sin y$  und  $v(x, y) := -\cos x \cos y$  sind offensichtlich auf  $\mathbb{R}^2$  stetig differenzierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} D_1 u(x, y) &= \cos x \sin y, & D_2 u(x, y) &= \sin x \cos y, \\ D_1 v(x, y) &= \sin x \cos y, & D_2 v(x, y) &= \cos x \sin y. \end{aligned}$$

Wir prüfen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (CRD) nach:  $D_1 u = D_2 v$  ist immer erfüllt.  $D_2 u(x, y) = -D_1 v(x, y)$  gilt genau dann, wenn  $\sin x \cos y = 0$  ist, also wenn  $x = k\pi$  mit einem  $k \in \mathbb{Z}$  oder  $y = (m + \frac{1}{2})\pi$  mit einem  $m \in \mathbb{Z}$ . Genau in diesen Punkten ist  $f$  komplex differenzierbar. Da die Menge

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \text{ oder } \operatorname{Im} z = (m + \frac{1}{2})\pi \text{ für ein } m \in \mathbb{Z}\}$$

nicht offen ist, liegt nirgends Holomorphie vor. Für  $z = x + iy \in M$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  ergibt sich

$$f'(z) = D_1 u(x, y) + i D_1 v(x, y) = \cos x \sin y + \underbrace{i \sin x \cos y}_{=0, \text{ da } z \in M} = \cos x \sin y.$$

- b) Für  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt  $f(x + iy) = (x + iy)x = x^2 + ixy =: u(x, y) + iv(x, y)$ . Die Funktionen  $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetig differenzierbar mit

$$D_1 u(x, y) = 2x, \quad D_2 u(x, y) = 0, \quad D_1 v(x, y) = y, \quad D_2 v(x, y) = x.$$

Wegen

$$\begin{aligned} D_1 u(x, y) = D_2 v(x, y) &\iff 2x = x \iff x = 0, \\ D_2 u(x, y) = -D_1 v(x, y) &\iff 0 = -y \iff y = 0 \end{aligned}$$

sind die CRD nur für  $(x, y) = (0, 0)$  erfüllt. Deshalb liegt nur in  $z = 0$  komplexe Differenzierbarkeit vor. Da  $\{0\} \subset \mathbb{C}$  nicht offen ist, ist  $f$  nirgendwo holomorph.

- c) Hier ist  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ . Für  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  gilt

$$f(x + iy) = \frac{x + iy}{x - iy} + \frac{x - iy}{x + iy} = \frac{(x + iy)^2}{x^2 + y^2} + \frac{(x - iy)^2}{x^2 + y^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2}.$$

Wir definieren  $u: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x, y) = \frac{2x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2}$ , sowie  $v: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v(x, y) = 0$ . Dann erhalten wir für  $(x, y) \neq (0, 0)$

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = u(x, y).$$

Offenbar sind  $u$  und  $v$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  stetig differenzierbar; die Quotientenregel liefert

$$D_1 u(x, y) = \frac{4x(x^2 + y^2) - (2x^2 - 2y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{8xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

und genauso

$$D_2 u(x, y) = \frac{-8x^2 y}{(x^2 + y^2)^2},$$

außerdem gilt

$$D_1 v(x, y) = D_2 v(x, y) = 0.$$

Damit sind die CRD genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{8xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{-8x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = 0,$$

also wenn  $x = 0$  oder  $y = 0$  gilt. Die Funktion  $f$  ist somit nur auf der imaginären und der reellen Achse komplex differenzierbar (natürlich mit Ausnahme des Nullpunktes, wo sie gar nicht definiert ist). Hier lautet die Ableitung

$$f'(x + iy) = D_1u(x, y) + iD_1v(x, y) = 0.$$

Da  $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \operatorname{Re} z = 0 \text{ oder } \operatorname{Im} z = 0\}$  nicht offen ist, liegt Holomorphie nirgends vor.

### Aufgabe 52

Da  $\mathbb{C}$  einfach zusammenhängend ist, gilt (vgl. Sätze 2 und 3 in 1.4 3):  $u$  ist genau dann Realteil einer holomorphen Funktion, wenn  $u$  harmonisch ist, wenn also  $\Delta u = 0$  gilt. Wegen

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= (D_1^2u)(x, y) + (D_2^2u)(x, y) \\ &= 12x^2 + 2\lambda y^2 + 12y^2 + 2\lambda x^2 = (12 + 2\lambda)(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

ist dies genau für  $\lambda = -6$  der Fall.

Wir betrachten im folgenden daher  $u(x, y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2$ . Nun benötigen wir alle Funktionen  $v$  mit  $D_1v = -D_2u$  und  $D_2v = D_1u$ , d. h. die Funktionen  $v$ , die konjugiert harmonisch zu  $u$  sind. Die erste Forderung an  $v$  lautet

$$D_1v(x, y) = -D_2u(x, y) = -(4y^3 - 12x^2y) = -4y^3 + 12x^2y.$$

Hieraus folgt durch Integration bezüglich  $x$ : Es gilt  $v(x, y) = -4xy^3 + 4x^3y + c(y)$  mit einer gewissen Funktion  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Damit ergibt sich

$$D_2v(x, y) = -12xy^2 + 4x^3 + c'(y),$$

und dies soll  $= D_1u(x, y) = 4x^3 - 12xy^2$  sein. Dazu muss  $c'(y) = 0$  gelten, also  $c$  konstant sein. Damit haben wir die holomorphe Funktion  $f$  gefunden

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= u(x, y) + iv(x, y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + i(-4xy^3 + 4x^3y + c) \\ &= x^4 + 4ix^3y - 6x^2y^2 - 4ixy^3 + y^4 + ic = (x + iy)^4 + ic \quad (c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Wir erhalten also: Genau die Funktionen der Form  $f(z) = z^4 + ic$ , wobei  $c \in \mathbb{R}$  beliebig, haben  $u(x, y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2$  als Realteil.

### Aufgabe 53

- a) Auf  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0 \text{ und } \operatorname{Re} z \in (-\infty, 0]\}$  =  $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z = x \in \mathbb{R} \text{ und } x \in (-\infty, 0]\}$  sind die verschiedenen Zweige des Logarithmus gegeben durch

$$f_k(z) := \ln|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), \quad \text{wobei } \arg(z) \in (-\pi, \pi) \text{ und } k \in \mathbb{Z}.$$

Nach Satz 3 in 2.3 ist  $f_k: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  schlicht. Wegen  $G \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  ist jede dieser Funktionen auch in  $G$  schlicht.

*Bemerkung:* Man hätte statt  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  auch ein anderes Holomorphiegebiet wählen können; der Schlitz muss nur außerhalb von  $G$  verlaufen.

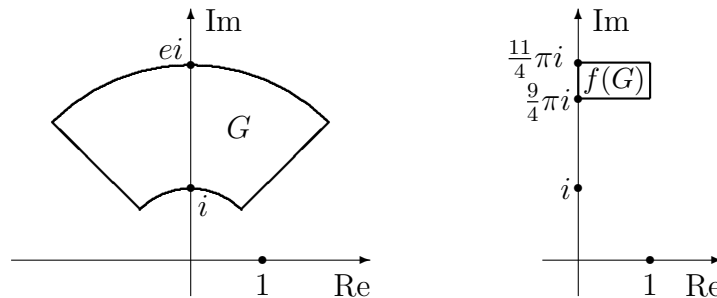
b) Für die oben definierten  $f_k$  gilt

$$f_k(i) = \ln|i| + i \arg(i) + 2k\pi i = 0 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i = (2k + \frac{1}{2})\pi i.$$

Somit ist die Forderung  $\log(i) = \frac{5}{2}\pi i$  genau für  $k = 1$  erfüllt; also ist  $f_1: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  der gesuchte Zweig des Logarithmus.

Setze  $f := f_1$ . Für  $z \in G$  durchläuft  $|z|$  das Intervall  $(1, e)$ , also  $\operatorname{Re} f(z) = \ln|z|$  das Intervall  $(0, 1)$ . Da  $\arg(z)$  das Intervall  $(\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$  überstreicht, muss  $\operatorname{Im} f(z) = \arg(z) + 2\pi$  das Intervall  $(\frac{9}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi)$  durchlaufen. Insgesamt bedeutet dies

$$f(G) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in (0, 1), \operatorname{Im}(z) \in (\frac{9}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi)\}.$$



c) Für  $h(z) := e^z$  gilt  $G = h(f(G))$ . Da  $h$  in  $f(G)$  schlicht ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} I(G) &= I(h(f(G))) = \iint_{f(G)} |h'(x + iy)|^2 d(x, y) = \int_{x=0}^1 \int_{y=9\pi/4}^{11\pi/4} e^{2x} dy dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{2x}}{2} \Big|_{x=0}^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{4}. \end{aligned}$$

### Aufgabe 54

a) Definitionsgemäß gilt für die Hauptzweige von Potenzfunktion und Logarithmus

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}, \quad \operatorname{Log} z = \ln|z| + i \arg z, \quad \text{wobei } \arg z \in (-\pi, \pi), \alpha \in \mathbb{C}.$$

• Mit  $\operatorname{Log}(1 + i) = \ln|1 + i| + i \arg(1 + i) = \ln \sqrt{2} + i\pi/4$  ergibt sich

$$(1 + i)^i = e^{i \operatorname{Log}(1+i)} = e^{i(\ln \sqrt{2} + i\pi/4)} = e^{i \ln \sqrt{2} - \pi/4} = e^{-\pi/4} (\cos(\ln \sqrt{2}) + i \sin(\ln \sqrt{2})).$$

Man liest ab:  $\operatorname{Re}((1 + i)^i) = e^{-\pi/4} \cos(\frac{1}{2} \ln 2)$  und  $\operatorname{Im}((1 + i)^i) = e^{-\pi/4} \sin(\frac{1}{2} \ln 2)$ .

• Wegen  $\operatorname{Log} i = \ln|i| + i \arg i = i\pi/2$  gilt  $i^i = e^{i(i\pi/2)} = e^{-\pi/2}$ , also

$$i^{(i^i)} = i^{(e^{-\pi/2})} = \exp(e^{-\pi/2} \operatorname{Log} i) = \exp(\frac{\pi}{2} e^{-\pi/2} i) = \cos(\frac{\pi}{2} e^{-\pi/2}) + i \sin(\frac{\pi}{2} e^{-\pi/2}).$$

Man sieht:  $\operatorname{Re}(i^{(i^i)}) = \cos(\frac{\pi}{2} e^{-\pi/2})$  und  $\operatorname{Im}(i^{(i^i)}) = \sin(\frac{\pi}{2} e^{-\pi/2})$ .

• Wegen  $\operatorname{Log} i = i\pi/2$  ergibt sich

$$\operatorname{Log}(\operatorname{Log} i) = \operatorname{Log}(i\pi/2) = \ln|i\pi/2| + i \arg(i\pi/2) = \ln(\pi/2) + i\pi/2.$$

Damit erhalten wir

$$(\operatorname{Log} i)^i = e^{i \operatorname{Log}(\operatorname{Log} i)} = e^{i(\ln(\pi/2) - \pi/2)} = e^{-\pi/2} \cos(\ln(\pi/2)) + i e^{-\pi/2} \sin(\ln(\pi/2)),$$

und Real- und Imaginärteil können unmittelbar abgelesen werden.

b) Die Gleichung  $e^{1/z} = i = e^{i\pi/2}$  ist genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{z} = i \frac{\pi}{2} + 2k\pi i = i \frac{(1 + 4k)\pi}{2} \iff z = -i \frac{2}{(1 + 4k)\pi}$$

mit einem gewissen  $k \in \mathbb{Z}$  gilt, d.h.  $\{z \in \mathbb{C} \mid e^{1/z} = i\} = \{\frac{-2i}{(1+4k)\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

### Aufgabe 55

a) Für  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \sin(x + iy) &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{(\cos x + i \sin x)e^{-y} - (\cos x - i \sin x)e^y}{2i} \\ &= -i \frac{\cos x (e^{-y} - e^y) + i \sin x (e^{-y} + e^y)}{2} = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y. \end{aligned}$$

• Parallelen zur reellen Achse mit der Parametrisierung  $z(x) = x + iy$  ( $x \in \mathbb{R}$  beliebig,  $y \in \mathbb{R}$  fest) werden auf  $w(x) = \sin(x + iy)$  abgebildet.

Im Falle  $y = 0$  ergibt sich  $w(x) = \sin x$  wegen  $\cosh 0 = 1$  und  $\sinh 0 = 0$ . Die reelle Achse wird somit auf das Intervall  $[-1, 1]$  abgebildet.

Für  $y \neq 0$  erhält man eine Ellipse (um 0) mit den Halbachsen  $\cosh y$  und  $|\sinh y|$ .

• Betrachtet man das Bild einer Parallelen zur imaginären Achse, so erhält man die Parametrisierung  $w(y) = \sin(x + iy)$ ,  $y \in \mathbb{R}$  beliebig,  $x \in \mathbb{R}$  fest.

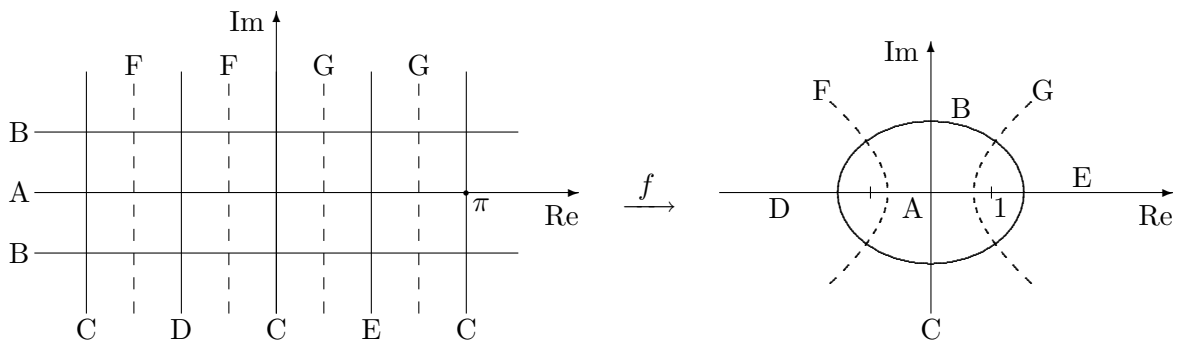
Für  $x = k\pi$  mit einem  $k \in \mathbb{Z}$  gilt  $w(y) = i(-1)^k \sinh y$ , also ergibt sich als Bild die imaginäre Achse.

Für  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  mit einem  $k \in \mathbb{Z}$  ist  $w(y) = (-1)^k \cosh y$ , also bekommt man als Bild eine der beiden Halbgeraden  $(-\infty, -1]$  und  $[1, \infty)$ .

In allen anderen Fällen ergeben sich Hyperbeläste, denn dann gilt

$$\left(\frac{\operatorname{Re} w(y)}{\sin x}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{Im} w(y)}{\cos x}\right)^2 = \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1.$$

Sämtliche Fälle sind in der folgenden Skizze aufgeführt:



b) Wegen  $f'(z) = \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$  gilt  $f'(z) = 0$  genau dann, wenn  $e^{iz} = -e^{-iz}$ , also wenn  $e^{2iz} = -1 = e^{i\pi}$ . Dies bedeutet  $2z = \pi + 2k\pi$  mit einem  $k \in \mathbb{Z}$ . Also ist  $f'(z_0) \neq 0$  genau für  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  erfüllt.

Nun sei  $z_0 = x_0 + iy_0$  ein Punkt, in dem  $f'(z_0) \neq 0$  gilt. Mit  $g$  bezeichnen wir die Parallele zur reellen Achse, die durch  $z_0$  geht, und mit  $h$  die Parallele zur imaginären Achse durch  $z_0$ . Die Geraden  $g$  und  $h$  schneiden sich in  $z_0$  im rechten Winkel. Wir wollen bestätigen, dass sich auch die Bilder dieser Geraden im Punkt  $f(z_0)$  im rechten Winkel schneiden.

Betrachten wir zunächst die Sonderfälle:

Ist  $y_0 = 0$ , so ist  $g = \mathbb{R}$  und  $f(g) = [-1, 1]$ . Für  $x_0 = k\pi$  ist  $f(h)$  die imaginäre Achse und diese steht senkrecht auf  $[-1, 1]$ . Der Fall  $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$  tritt wegen  $f'(z_0) = 0$  nicht auf. Für beliebiges  $x_0 \neq k\frac{\pi}{2}$  ist  $f(h)$  ein Hyperbelast; er steht senkrecht auf  $[-1, 1]$ .

Ist  $y_0 \neq 0$ , so wird  $g$  auf eine Ellipse abgebildet. Für  $x_0 = k\pi$  ist  $f(h)$  die imaginäre Achse; sie steht senkrecht auf der Ellipse. Für  $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ist  $f(h) = (-\infty, -1]$  oder  $f(h) = [1, \infty)$ ; in beiden Fällen schneidet  $f(h)$  die Ellipse senkrecht.

Nun der allgemeine Fall:  $y_0 \neq 0$  und  $x_0 \neq k\frac{\pi}{2}$ . Dann ist  $f(g)$  eine Ellipse und  $f(h)$  ein Hyperbelast. Identifizieren wir  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$ , so haben sie die Parametrisierungen

$$\vec{r}_{f(g)}(t) = (\cosh y_0 \sin t, \sinh y_0 \cos t) \quad \text{und} \quad \vec{r}_{f(h)}(t) = (\sin x_0 \cosh t, \cos x_0 \sinh t).$$

Als Tangentenvektoren erhält man

$$\vec{r}_{f(g)}'(t) = (\cosh y_0 \cos t, -\sinh y_0 \sin t) \quad \text{und} \quad \vec{r}_{f(h)}'(t) = (\sin x_0 \sinh t, \cos x_0 \cosh t).$$

Es folgt  $\vec{r}_{f(g)}'(x_0) \cdot \vec{r}_{f(h)}'(y_0) = \sin x_0 \cos x_0 \sinh y_0 \cosh y_0 - \sin x_0 \cos x_0 \sinh y_0 \cosh y_0 = 0$ . Also schneiden sich  $f(g)$  und  $f(h)$  in  $f(z_0)$  auch in diesem Fall im rechten Winkel.

*Bemerkung:* Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $z_0 \in G$ . Eine holomorphe Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt in  $z_0$  *konform*, falls  $f'(z_0) \neq 0$  gilt. Ist  $f$  in  $z_0$  konform, so ist  $f$  in  $z_0$  *winkeltreu*, d.h. für alle Kurven  $z_1(t), z_2(t)$  mit  $z_1(0) = z_2(0) = z_0$ , die in  $z_0$  Tangenten besitzen, besitzen auch die Bildkurven  $w_1(t) := f(z_1(t))$  und  $w_2(t) := f(z_2(t))$  in  $f(z_0)$  Tangenten und die Winkel zwischen beiden Tangentenpaaren stimmen nach Größe und Drehsinn überein.

Somit haben wir in dieser Teilaufgabe sämtliche Punkte, in denen  $f$  konform ist, bestimmt und die Winkeltreue von  $f$  für die Kurven aus **a)** bestätigt.

## Aufgabe 56

Die Aussage dieser Aufgabe heißt in der Literatur *Satz von Liouville*. Da die holomorphe Funktion  $f$  auf der ganzen komplexen Ebene definiert ist, gilt

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi \quad (*)$$

für jedes  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $R > 0$  (siehe Vorlesung).

Indem wir im Kurvenintegral (\*) den Kreis durch  $\xi = z_0 + Re^{i\phi}$  (d.h.  $d\xi = iRe^{i\phi}d\phi$  in der üblichen formalen Schreibweise) parametrisieren, können wir folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} |2\pi i f'(z_0)| &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\phi})}{|Re^{i\phi}|^2} iRe^{i\phi} d\phi \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(z_0 + Re^{i\phi})R}{|Re^{i\phi}|^2} \right| d\phi \\ &\leq \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + Re^{i\phi})|}{R} d\phi \\ &\leq \frac{M}{R} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi M}{R} \end{aligned}$$

wobei wir  $|f| \leq M$  und an mehreren Stellen  $|e^{i\phi}| = 1$  ausgenutzt haben. Also erhalten wir

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}$$

für jedes  $R > 0$ . Der Grenzwert  $R \rightarrow \infty$  liefert:  $f'(z_0) = 0$ , und da  $z_0 \in \mathbb{C}$  beliebig war, hat  $f'$  konstant den Wert 0. Als nächstes bemerken wir, dass

$$f(z) - f(0) = \int_{\gamma} f'(\xi) d\xi$$

für jedes  $z \in C$  gilt, wobei  $\gamma$  eine Kurve ist, die  $z$  und 0 miteinander verbindet. Da  $f'(\xi) \equiv 0$  folgt, dass  $f(z) = f(0)$  und somit ist  $f$  konstant.