Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Andreas Müller-Rettkowski

Sommersemester 2013
06.07.2013

Übungsklausur

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (3+2+3+2 Punkte)

Es ist $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Begründen Sie, dass T injektiv ist. Geben Sie eine Basis von $T(\mathbb{R}^3)$ an.

b) Bestimmen Sie T^{-1} und hiermit alle $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit $T(\vec{x}) = \vec{u}$ für $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in T(\mathbb{R}^3)$.

c) Berechnen Sie die Eigenwerte von T. Geben Sie für jeden Eigenwert seine algebraische und geometrische Vielfachheit an.

d) Berechnen Sie den zum reellen Eigenwert von T gehörenden Eigenraum.

Aufgabe 2 (4+6 Punkte)

(a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0,0)$ stetig ist. Ist f in $(0,0)$ partiell differenzierbar?

(b) Bestimmen Sie Minimum und Maximum der Funktion $h(x,y) = x^2 + 7xy + y^2 + 4$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

(a) Es sei

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq -1, 1 \leq z \leq 2\}$$

sowie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = y + z$. Berechnen Sie

$$\iiint_D f(x,y,z) d(x,y,z).$$

(b) Es sei $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix}$$

und $F_1 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\},\ F_2 = \{(x,y,0) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Die Normalenvektoren $\vec{N}$ der Flächen F_1 und F_2 seien derart, dass $\vec{N}_z \geq 0$ gilt. Zeigen Sie

$$\int_{F_1} (\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{N} do = \int_{F_2} (\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{N} do$$

und berechnen Sie diese Integrale.

– bitte wenden –

Aufgabe 4 (2+4+4 Punkte)
Zur folgenden ist $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$.
(a) Berechnen Sie

$$\int_\gamma x dz$$

wobei γ die geradlinige Verbindung von 0 nach $1 + i$ ist.
(b) Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=r} x dz.$$

(c) Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 - 1} dz.$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Montag, den **.07.2013, im Sekretariat (Zimmer 3B-02, Allianzgebäude) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, den **.07.2013, von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) möglich.