Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. Semjon Wugalter

Sommersemester 2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Wegen $g(t) = 1$ für $t \in [-\pi, 0)$ und $g(t) = 1 + 2t$ für $t \in [0, \pi)$ folgt für jedes $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\hat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} e^{-ikt}\, dt + \int_{0}^{\pi} (1+2t) e^{-ikt}\, dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\, dt + \int_{0}^{\pi} 2t e^{-ikt}\, dt \right);\end{aligned}$$

für $k = 0$ ergibt sich hier $\frac{1}{2\pi}(2\pi + \pi^2) = 1 + \frac{1}{2}\pi$; sonst gilt (partielle Integration)

$$\begin{aligned}&= 0 + \frac{1}{\pi} \left(t \cdot \frac{e^{-ikt}}{-ik} \bigg|_{t=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{e^{-ikt}}{-ik}\, dt \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi(-1)^k}{-ik} - \frac{e^{-ikt}}{(-ik)^2} \bigg|_{t=0}^{\pi} \right) \\ &= \frac{i(-1)^k}{k} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k - 1}{-k^2} = \frac{i(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}.\end{aligned}$$

Damit ist die Fourierreihe von g

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) e^{ikt} = 1 + \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{i(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \right) e^{ikt}.$$

Als Koeffizienten in der reellen Form der Fourierreihe $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$ erhält man $a_0 = 2 + \pi$ und $a_k = \hat{g}(k) + \hat{g}(-k) = 2((-1)^k - 1)/(\pi k^2)$ sowie $b_k = i(\hat{g}(k) - \hat{g}(-k)) = 2(-1)^{k+1}/k$.

Nun zur Funktion h: Zur Abwechslung berechnen wir diesmal direkt die Koeffizienten a_k und b_k in der Cosinus/Sinus-Darstellung der Fourierreihe. Da h eine gerade Funktion ist (wegen $h(-t) = \cos(-\frac{1}{2}t) = \cos(\frac{1}{2}t) = h(t)$ für alle $t \in (-\pi, \pi)$), gilt $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cos(kt)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\tfrac{1}{2}t) \cos(kt)\, dt.$$

Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}I_k &:= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\tfrac{1}{2}t) \cos(kt)\, dt \\ &= \big[2\sin(\tfrac{1}{2}t)\cos(kt)\big]_{t=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2\sin(\tfrac{1}{2}t)(-k\sin(kt))\, dt \\ &= 2\big(\cos(k\pi) + \cos(-k\pi)\big) + 2k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\tfrac{1}{2}t)\sin(kt)\, dt \\ &= 4(-1)^k + 2k\left(\big[-2\cos(\tfrac{1}{2}t)\sin(kt)\big]_{t=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -2\cos(\tfrac{1}{2}t)(k\cos(kt))\, dt \right) \\ &= 4(-1)^k - 0 + 4k^2 I_k.\end{aligned}$$

Somit haben wir die Gleichung $I_k = 4(-1)^k + 4k^2 I_k$; dies bedeutet $I_k = 4(-1)^k/(1-4k^2)$. Damit kennen wir $a_k = I_k/\pi$ und es ergibt sich die Fourierreihe von h in reeller Form

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{(1-4k^2)\pi} \cos(kt)\,.$$

Hieraus kann man die Fourierkoeffizienten $\hat{h}(k)$ berechnen

$$\hat{h}(k) = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{a_k}{2} = \frac{2(-1)^k}{(1-4k^2)\pi} \qquad \text{und} \qquad \hat{h}(-k) = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{a_k}{2} = \frac{2(-1)^k}{(1-4k^2)\pi}\,,$$

wobei $b_0 := 0$, $k \in \mathbb{N}_0$. Daher lautet die Fourierreihe von h in komplexer Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{(1-4k^2)\pi}\, e^{ikt}\,.$$

Aufgabe 2

a) Für die Fourierkoeffizienten c_n von f gilt

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \alpha t e^{-int}\,dt + \int_{0}^{\pi} \beta t e^{-int}\,dt\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Für $n = 0$ ergibt sich wegen $e^{-i0t} = 1$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{\alpha t^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{\beta t^2}{2}\right]_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\alpha\pi^2}{2} + \frac{\beta\pi^2}{2}\right) = \frac{(\beta-\alpha)\pi}{4}\,,$$

und für $n \neq 0$ liefert partielle Integration

$$\int t e^{-int}\,dt = \frac{te^{-int}}{-in} - \int \frac{e^{-int}}{-in}\,dt = \frac{te^{-int}}{-in} - \frac{e^{-int}}{(-in)^2} = \left(\frac{it}{n} + \frac{1}{n^2}\right)e^{-int}.$$

Für alle $n \neq 0$ folgt damit

$$\begin{aligned}2\pi c_n &= \left[\alpha\left(\frac{it}{n} + \frac{1}{n^2}\right)e^{-int}\right]_{t=-\pi}^{0} + \left[\beta\left(\frac{it}{n} + \frac{1}{n^2}\right)e^{-int}\right]_{t=0}^{\pi}\\ &= \frac{\alpha}{n^2} - \alpha\left(\frac{-i\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\right)e^{in\pi} + \beta\left(\frac{i\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\right)e^{-in\pi} - \frac{\beta}{n^2}\,,\end{aligned}$$

wegen $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$ also

$$= \frac{(\alpha-\beta)(1-(-1)^n)}{n^2} + \frac{(-1)^n(\alpha+\beta)\pi i}{n}\,.$$

Wir fassen zusammen:

$$c_0 = \frac{(\beta-\alpha)\pi}{4}\,, \qquad c_n = \frac{(\alpha-\beta)(1-(-1)^n)}{2\pi n^2} + i\,\frac{(-1)^n(\alpha+\beta)}{2n} \quad (n \neq 0)\,.$$

Für die Fourierkoeffizienten a_n und b_n in der reellen Darstellung der Fourierreihe von f gilt $a_n = c_n + c_{-n}$ und $b_n = i(c_n - c_{-n})$, wegen $c_{-n} = \overline{c_n}$ (nur, da f reellwertig!) also

$$a_n = c_n + \overline{c_n} = 2\,\mathrm{Re}\,c_n \qquad \text{und} \qquad b_n = i(c_n - \overline{c_n}) = -2\,\mathrm{Im}\,c_n\,.$$

Damit folgt $a_0 = 2\,\mathrm{Re}\,c_0 = (\beta-\alpha)\pi/2$ und

$$a_n = \frac{(\alpha-\beta)(1-(-1)^n)}{\pi n^2}\,, \qquad b_n = -\frac{(-1)^n(\alpha+\beta)}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

b) Die Fourierreihe von f ist genau dann eine reine Sinusreihe, wenn $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sind, wenn also $\alpha = \beta$ gilt.

Alternativ: Die Fourierreihe von f ist genau dann eine reine Sinusreihe, wenn f eine ungerade Funktion ist, wenn also $\alpha = \beta$ gilt.

c) Die Funktion f ist 2π-periodisch und stückweise glatt, daher wird sie in allen Stetigkeitsstellen durch ihre Fourierreihe dargestellt, in Sprungstellen dagegen konvergiert die Fourierreihe gegen den Mittelwert des links- und des rechtsseitigen Grenzwerts.

Ist $\alpha = -\beta$, so ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, d. h. die Funktion wird auf ganz $\mathbb{R}$ durch ihre Fourierreihe dargestellt.

Ist dagegen $\alpha \neq -\beta$, so hat f in den Punkten $t_k = (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) Sprungstellen mit $f(t_k+) = f(t_k) = -\alpha\pi \neq \beta\pi = f(t_k-)$, ist sonst aber stetig. Daher wird in diesem Falle f nur in den Punkten $t \in \mathbb{R} \setminus \{\, (2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z} \,\}$ durch ihre Fourierreihe dargestellt. In den Punkten t_k konvergiert die Fourierreihe gegen $\frac{1}{2}(f(t_k+) + f(t_k-)) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)\pi \neq f(t_k)$.

Aufgabe 3

a) Eine reine Cosinusreihe ergibt sich für gerade Funktionen; also setzen wir f zu einer 2π-periodischen, geraden Funktion $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fort:

$$F(x) := \begin{cases} t - \frac{\pi}{2}, & t \in [0, \pi], \\ -t - \frac{\pi}{2}, & t \in (-\pi, 0), \end{cases} \qquad F(t + 2\pi) := F(t).$$

Für die Fourierkoeffizienten a_k und b_k von F gilt dann $b_k = 0$ und

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos(kt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(t) \cos(kt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t - \tfrac{\pi}{2}) \cos(kt)\, dt\,.$$

Es ist $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t - \frac{\pi}{2})\, dt = \frac{2}{\pi} [\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2} t]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} (\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}) = 0$ und für $k \neq 0$ haben wir

$$\int t \cos(kt)\, dt = \frac{t \sin(kt)}{k} - \int \frac{\sin(kt)}{k}\, dt = \frac{t \sin(kt)}{k} + \frac{\cos(kt)}{k^2}\,.$$

Folglich ist für $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \left(\frac{t \sin(kt)}{k} + \frac{\cos(kt)}{k^2} \right) \Bigg|_{t=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(kt)\, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k - 1}{k^2} - 0\,.$$

Das bedeutet $a_{2n} = 0$ und $a_{2n+1} = -4/((2n+1)^2\pi)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Da F stetig und stückweise glatt ist, stellt die Fourierreihe die Funktion F auf ganz $\mathbb{R}$ dar, es gilt also

$$t - \frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2 \pi} \cos((2n+1)t) \qquad \text{für alle } t \in [0, \pi]\,.$$

b) Eine reine Sinusreihe erhalten wir, wenn wir f zu einer ungeraden Funktion $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortsetzen:

$$F(x) := \begin{cases} t - \frac{\pi}{2}, & t \in (0, \pi), \\ 0 & t = 0 \text{ oder } t = \pi \\ t + \frac{\pi}{2}, & t \in (-\pi, 0), \end{cases} \qquad F(t + 2\pi) := F(t).$$

Dann gilt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin(kt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(t) \sin(kt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t - \tfrac{\pi}{2}) \sin(kt)\, dt$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Partielle Integration liefert

$$\int t\sin(kt)\,dt = -\frac{t\cos(kt)}{k} + \int \frac{\cos(kt)}{k}\,dt = -\frac{t\cos(kt)}{k} + \frac{\sin(kt)}{k^2}\,,$$

und es folgt

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{t\cos(kt)}{k} + \frac{\sin(kt)}{k^2}\right)\Big|_{t=0}^{\pi} - \int_0^\pi \sin(kt)\,dt \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-\pi(-1)^k}{k} + \frac{\cos(kt)}{k}\Big|_{t=0}^{\pi} = \frac{-2(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k-1}{k} = -\frac{(-1)^k+1}{k}\,. \end{aligned}$$

Also ist $b_{2n-1}=0$ und $b_{2n}=-1/n$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Da F stückweise glatt ist, wird die Funktion F in allen Stetigkeitsstellen durch ihre Fourierreihe dargestellt; wir erhalten also

$$t - \frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\sin(2nt) \qquad \text{für alle} \in (0,\pi)\,.$$

In den Stellen $t_k = k\pi$ konvergiert die Fourierreihe gegen $\frac{1}{2}(F(0+)+F(0-)) = \frac{1}{2}(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = 0$.

Aufgabe 4

Wiederholung des Gram-Schmidt-Verfahrens: In einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V\to\mathbb{K}$ seien n linear unabhängige Vektoren $x_1,\dots,x_n$ gegeben. Wir wollen ein Orthonormalsystem $u_1,\dots,u_n\in V$ so konstruieren, dass $\operatorname{lin}\{u_1,\dots,u_j\} = \operatorname{lin}\{x_1,\dots,x_j\}$ für alle $j=1,\dots,n$ gilt.
Wir bestimmen zunächst nur ein Orthogonalsystem $v_1,\dots,v_n$ mit der Eigenschaft $\operatorname{lin}\{v_1,\dots,v_j\} = \operatorname{lin}\{x_1,\dots,x_j\}$ für alle $j=1,\dots,n$. (Bei einem Orthogonalsystem wird nur verlangt, dass die Vektoren orthogonal zueinander sind, nicht aber, dass sie Norm 1 haben.) Die Forderung $\operatorname{lin}\{v_1\} = \operatorname{lin}\{x_1\}$ können wir erfüllen, indem wir $v_1 := x_1$ setzen. Dann geht unser Verfahren rekursiv weiter: Haben wir für ein gewisses $j\in\{1,\dots,n-1\}$ ein Orthogonalsystem $v_1,\dots,v_j$ mit $\operatorname{lin}\{v_1,\dots,v_j\} = \operatorname{lin}\{x_1,\dots,x_j\}$ gefunden, so ist die Frage, wie wir v_{j+1} definieren sollen. Setzen wir

$$v_{j+1} := x_{j+1} + \sum_{k=1}^{j} \lambda_k v_k$$

mit gewissen $\lambda_k\in\mathbb{K}$, so ist die Forderung $\operatorname{lin}\{v_1,\dots,v_{j+1}\} = \operatorname{lin}\{x_1,\dots,x_{j+1}\}$ erfüllt. Damit dieses v_{j+1} zusätzlich orthogonal zu allen v_i mit $i\in\{1,\dots,j\}$ ist, muss

$$0 \overset{!}{=} \big\langle v_{j+1}, v_i\big\rangle = \big\langle x_{j+1}, v_i\big\rangle + \sum_{k=1}^{j}\lambda_k\big\langle v_k, v_i\big\rangle = \big\langle x_{j+1}, v_i\big\rangle + \lambda_i\big\langle v_i, v_i\big\rangle$$

für alle $i\in\{1,\dots,j\}$ gelten. Folglich wählen wir

$$\lambda_i := -\frac{\big\langle x_{j+1}, v_i\big\rangle}{\big\langle v_i, v_i\big\rangle} = -\frac{\big\langle x_{j+1}, v_i\big\rangle}{\|v_i\|^2}\,.$$

Fassen wir zusammen: Die Vektoren $v_1,\dots,v_n$ werden rekursiv definiert durch

$$v_1 := x_1\,, \qquad v_{j+1} := x_{j+1} - \sum_{k=1}^{j}\frac{\big\langle x_{j+1}, v_k\big\rangle}{\|v_k\|^2}\,v_k \quad (j=1,\dots,n-1)\,.$$

Man beachte: Die Vektoren $x_1,\dots,x_n$ sind nach Voraussetzung linear unabhängig; daher gilt $x_1\neq 0$ und $x_{j+1}\notin\operatorname{lin}\{x_1,\dots,x_j\} = \operatorname{lin}\{v_1,\dots,v_j\}$ für $j=1,\dots,n-1$, und damit folgt $v_j\neq 0$ für alle j. Somit ist die Division durch $\|v_k\|^2$ möglich.
Setzen wir nun noch $u_j := v_j/\|v_j\|$ $(j=1,\dots,n)$, so haben wir ein Orthonormalsystem mit den geforderten Eigenschaften bestimmt.

a) Die gegebenen Vektoren x_1, x_2, x_3 sind linear unabhängig. Um das zu sehen, kann man die Vektoren zeilenweise in eine Matrix schreiben und diese auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2i & 0 \\ 5 & 3i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 5Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & -2 \\ 0 & 3i & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - \frac{3}{2}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Führe nun das Gram-Schmidt-Verfahren durch:

$$v_1 := x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\langle x_2, v_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \cdot \overline{1} + 2i \cdot \overline{0} + 0 \cdot \overline{1} = 2$$

erhalten wir

$$v_2 := x_2 - \frac{\langle x_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(Beachte: Es gilt $\|v_2\| = (|1|^2 + |2i|^2 + |-1|^2)^{1/2} = \sqrt{6}$.) Für die Berechnung von v_3 brauchen wir die Skalarprodukte

$$\langle x_3, v_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 \cdot \overline{1} + 3i \cdot \overline{0} + 1 \cdot \overline{1} = 6,$$

$$\langle x_3, v_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 \cdot \overline{1} + 3i \cdot \overline{2i} + 1 \cdot \overline{(-1)} = 5 - 6i^2 - 1 = 10.$$

Damit ergibt sich dann

$$v_3 := x_3 - \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v_3, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$u_3 := \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Fazit: u_1, u_2, u_3 ist ein Orthonormalsystem mit den gewünschten Eigenschaften.

b) Wir wollen das Verfahren von Gram-Schmidt benutzen. Dazu prüfen wir zuerst die gegebenen Vektoren y_1, y_2, y_3 auf lineare Unabhängigkeit:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + 3Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 5Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & -6 & 4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit sind y_1, y_2, y_3 linear abhängig, insbesondere können wir an der Zeilenstufenform ablesen, dass y_3 eine Linearkombination von y_1 und y_2 ist (dies ist möglich, da bei den Zeilenumformungen keine Zeilen vertauscht wurden). Infolgedessen gilt $\operatorname{lin}\{y_1, y_2, y_3\} = \operatorname{lin}\{y_1, y_2\}$.

Wir sehen außerdem, dass y_1 und y_2 linear unabhängig sind.

Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}\{y_1, y_2\}$ führen wir nun das Verfahren von Gram-Schmidt durch:

$$v_1 := y_1, \quad u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{1+1+1+1}} = \frac{1}{2}\, y_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist $\langle y_2, v_1 \rangle = 5 - 1 + 1 - 1 = 4$ und wir erhalten

$$v_2 := y_2 - \frac{\langle y_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich bilden u_1, u_2 eine Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}\{y_1, y_2\} = \operatorname{lin}\{y_1, y_2, y_3\}$.

Aufgabe 5

a) Die Aussage ist wahr: Sei $x \in V$. Da die Gleichung $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in V$ gilt, ist diese insbesondere für $y = x$ erfüllt. Also haben wir $\langle x, x \rangle = 0$. Nach Definition des Skalarprodukts kann dies nur für $x = 0$ der Fall sein.

b) Die Aussage ist wahr: Seien $x_1, \ldots, x_n, x \in V$. Es gelte $x \neq 0$ und $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Wäre $\operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\} = V$, so hätten wir $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in V$. Aus **a)** folgte dann unmittelbar $x = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung $x \neq 0$. Also ist die Annahme falsch und es gilt $\operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\} \neq V$.

Aufgabe 6

Es gilt

$$A^T = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 13 & -3 & 10 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 5 \\ 10 & -1 & 9 & 9 \\ 4 & 5 & 9 & 29 \end{pmatrix}, \quad A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & -1 & -10 \\ -1 & 27 & 12 \\ -10 & 12 & 12 \end{pmatrix}.$$