

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive
Komplexe Analysis und Integraltransformationen**

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die 2π -periodischen Funktionen g und h seien gegeben durch

$$\begin{aligned} g(t) &= 1 + t + |t| \quad (-\pi \leq t < \pi), & g(t + 2\pi) &= g(t), \\ h(t) &= \cos\left(\frac{1}{2}t\right) \quad (-\pi \leq t < \pi), & h(t + 2\pi) &= h(t). \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Fourierreihen dieser Funktionen in reeller und komplexer Form.

Aufgabe 2

Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} \alpha t & \text{für } t \in [-\pi, 0), \\ \beta t & \text{für } t \in [0, \pi), \end{cases} \quad f(t + 2\pi) = f(t).$$

- Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten der Funktion f .
- Welchen Bedingungen müssen α und β genügen, damit die Fourierreihe von f eine reine Sinusreihe ist?
- Geben Sie (in Abhängigkeit von den Parametern α und β) an, in welchen Punkten $t \in \mathbb{R}$ die Funktion f durch ihre Fourierreihe dargestellt wird.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Funktion $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $f(t) = t - \frac{\pi}{2}$ gegeben ist. Entwickeln Sie f in eine

- Kosinusreihe,
- Sinusreihe.

Hinweis: Sie müssen die Funktion f jeweils unterschiedlich fortsetzen.

Aufgabe 4

- Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die folgenden Vektoren aus \mathbb{C}^3 an:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Seien $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Geben Sie eine Orthonormalbasis von $\text{lin}\{y_1, y_2, y_3\}$ an.

Aufgabe 5

Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

- a) Ist $x \in V$ und gilt $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in V$, so folgt $x = 0$.
- b) Es seien $x_1, \dots, x_n, x \in V$. Ist $x \neq 0$ und ist x orthogonal zu jedem Vektor aus $\text{lin}\{x_1, \dots, x_n\}$, so folgt $\text{lin}\{x_1, \dots, x_n\} \neq V$.

Aufgabe 6

Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$. Berechnen Sie $A \cdot A^T$ und $A^T \cdot A$.

Die Aufgaben 1,2 und 3 sind die Aufgaben zur KAI-Vorlesung.