

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive
 Komplexe Analysis und Integraltransformationen
 Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt**

Aufgabe 1

Sei $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

a) Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\begin{aligned} \det(A) &= +2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2(1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1) - 2(-1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1) + 4(-1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) = -4. \end{aligned}$$

b) Wir ersetzen die 2. Spalte durch die Summe der 1. und 2. Spalte (vgl. 15.2 (b)) und entwickeln die resultierende Matrix nach der 2. Spalte:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -4 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -4(-1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1) = -4.$$

Aufgabe 2

Wir wissen, dass sich die Determinante einer Matrix nicht verändert, wenn wir das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte bzw. das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren. Auf diese Weise formen wir die Matrizen nun um und verwenden zudem den Entwicklungssatz.

[Die verwendete Umformung steht jeweils in Klammern hinter dem Gleichheitszeichen.]

$$\begin{aligned} \det(A) &=_{[Z_1 \rightarrow Z_1 + Z_4]} \det \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =_{[S_j \rightarrow S_j - S_1, j=2,3,4]} \det \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =_{[Z_1 \rightarrow Z_1 + Z_3]} 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 5 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -5(8 + 1) = -45. \end{aligned}$$

Und auch die Matrix C lässt sich so behandeln:

$$\begin{aligned} \det(B) &=_{[Z_1 \rightarrow Z_1 - Z_4]} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} =_{[S_4 \rightarrow S_4 - S_1]} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix} \\ &=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix} =_{[S_3 \rightarrow S_3 - S_1]} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix} = \alpha - 4 - 1 = \alpha - 5.$$

Man sieht: $\det B \neq 0 \iff \alpha \neq 5$. Daher ist B genau für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{5\}$ regulär.

Aufgabe 3

Wir verwenden vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

IA: $n = 2$. Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leq j < k \leq 2} (x_k - x_j).$$

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ beliebig. Es gelte

$$\det \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & \dots & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \dots & y_2^{n-1} \\ 1 & y_3 & y_3^2 & \dots & y_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & y_n & y_n^2 & \dots & y_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (y_k - y_j) \quad \text{für alle } y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R} \text{ (IV).}$$

Seien nun $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Zur Berechnung von

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

multiplizieren wir zuerst die vorletzte Spalte mit x_1 und ziehen diese von der letzten ab. Dann multiplizieren wir die vorvorletzte Spalte mit x_1 und ziehen diese von der vorletzten ab, usw. Die letzte Umformung besteht darin, das x_1 -fache der ersten Spalte von der zweiten Spalte abzuziehen. Für $k = n+1, n, \dots, 3, 2$ ziehen wir also nacheinander das x_1 -fache der $(k-1)$ -ten Spalte von der k -ten Spalte ab. Im Anschluss entwickeln nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \dots & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 & \dots & x_3^n - x_1 x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \dots & x_n^n - x_1 x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1 x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-1}(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_3^{n-1}(x_3 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_1) \\ x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) & \dots & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1} - x_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun können wir aus der ersten Zeile dieser Matrix den Faktor $(x_2 - x_1)$ herausziehen, aus der zweiten Zeile $(x_3 - x_1)$ etc. und aus der letzten Zeile den Faktor $(x_{n+1} - x_1)$:

$$= \underbrace{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1)(x_{n+1} - x_1)}_{= \prod_{1 < l \leq n+1} (x_l - x_1)} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Diese $n \times n$ Matrix ist wiederum eine Vandermonde-Matrix. Gemäß Induktionsvoraussetzung mit $y_m = x_{m+1}$ (für $m = 1, 2, \dots, n$) gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_{k+1} - x_{j+1}) = \prod_{2 \leq i < l \leq n+1} (x_l - x_i).$$

Zusammen ergibt sich

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{1 < l \leq n+1} (x_l - x_1) \cdot \prod_{2 \leq i < l \leq n+1} (x_l - x_i) = \prod_{1 \leq i < l \leq n+1} (x_l - x_i).$$

Aufgabe 4

Die beiden gegebenen Vektoren haben Norm 1 und sind orthogonal zueinander. Wir suchen nun einen Vektor $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ mit

$$\left(z \mid \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(z \mid \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ (1-i)/2 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Komponentenweise geschrieben (und mit $\sqrt{2}$ bzw. 2 durchmultipliziert) heißt das

$$-iz_1 - z_2 = 0 \quad \text{und} \quad z_1 + iz_2 + (1+i)z_3 = 0.$$

Die erste Gleichung können wir mit $z_1 = 1$ und $z_2 = -i$ erfüllen. Die zweite Gleichung liefert dann $2 + (1+i)z_3 = 0$, also $z_3 = -2/(1+i) = -1+i$. Den so gefundenen Vektor z müssen wir nun noch normieren, also durch seine Norm teilen. Wir ergänzen daher den Vektor

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Der zu ergänzende Vektor ist nicht eindeutig bestimmt, denn man kann ihn mit beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{C}$, für die $|c| = 1$ gilt, multiplizieren.