Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2015
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Annahme: Es gibt eine 2π-periodische, über $[-\pi,\pi]$ integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mit reellen Fourierkoeffizienten $a_k=0$ ($k\in\mathbb{N}_0$) und $b_k=\frac{1}{\sqrt{k}}$ ($k\in\mathbb{N}$). Die Besselsche Ungleichung besagt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2 \leqslant \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt < \infty.$$

Daher folgt wegen $\hat{f}(0)=0$, $\hat{f}(k)=\frac{1}{2}(a_k-ib_k)=-\frac{i}{2\sqrt{k}}$ und $\hat{f}(-k)=\frac{1}{2}(a_k+ib_k)=\frac{i}{2\sqrt{k}}$ (für alle $k\in\mathbb{N}$)

$$\infty > \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2 = \lim_{K\to\infty}\sum_{k=-K}^{K}|\hat{f}(k)|^2 = \lim_{K\to\infty}\sum_{k=1}^{K}\big(|\hat{f}(k)|^2+|\hat{f}(-k)|^2\big) = \lim_{K\to\infty}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{2k},$$

d.h. die Konvergenz der harmonischen Reihe. Dies ist ein Widerspruch! Deshalb existiert keine 2π-periodische, über $[-\pi,\pi]$ integrierbare Funktion, welche die Fourierreihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kt)}{\sqrt{k}}$ besitzt.

Aufgabe 2

Sei $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine zweimal stetig differenzierbare und 2π-periodische Funktion. Bezeichnen

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt, \qquad k\in\mathbb{Z},$$

die Fourierkoeffizienten von f, so gibt es nach dem Satz in 18.8 die Darstellung

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikt} \qquad \text{für alle } t\in\mathbb{R}.$$

Da f' stetig differenzierbar und 2π-periodisch ist, gilt nach dem Darstellungssatz in 18.8

$$f'(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k e^{ikt} \qquad \text{für alle } t\in\mathbb{R},$$

wobei

$$\gamma_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-ikt}\,dt, \qquad k\in\mathbb{Z},$$

die Fourierkoeffizienten von f' sind. Zum Nachweis der behaupteten Identität, müssen wir also $\gamma_k = ikc_k$ für alle $k\in\mathbb{Z}$ zeigen.
Für $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ erhalten wir mit Hilfe von partieller Integration

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\big[f(t)e^{-ikt}\big]_{t=-\pi}^{\pi}}_{=0,\text{ da }2\pi\text{-per.}} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)ike^{-ikt}\,dt = ikc_k.$$

Im Fall $k=0$ ergibt sich wegen der 2π-Periodizität von f

$$\gamma_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\big[f(t)\big]_{-\pi}^{\pi} = 0 = i\cdot 0\cdot c_0.$$

Aufgabe 3

Sei $a > 0$. Da f von exponentieller Ordnung γ ist, gibt es eine Konstante $M > 0$ so, dass

$$|f(x)| \leqslant Me^{\gamma x}$$

für alle $x \geqslant 0$ gilt. Setzen wir in diese Ungleichung at für x ein, dann erhalten wir

$$|f(at)| \leqslant Me^{(\gamma a)t}$$

für alle $t \geqslant 0$. Damit ist $t \mapsto f(at)$ von exponentieller Ordnung γa, und deshalb konvergiert $\mathscr{L}\{f(at)\}(s)$ (absolut) für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \gamma a$. Mit Hilfe der Substitution $\tau = at$ erkennen wir

$$\mathscr{L}\{f(at)\}(s) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(at)\, dt = \frac{1}{a} \lim_{b\to\infty} \int_0^{ab} e^{-(s/a)\tau} f(\tau)\, d\tau = \frac{1}{a} \mathscr{L}\{f\}\left(\frac{s}{a}\right).$$

Aufgabe 4

Für $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ gilt

$$x \times y = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 2-4 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$(x \times y|x) = (\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = -2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 0$$

[dieses Ergebnis war zu erwarten, weil stets $x \times y$ sowohl orthogonal auf x als auch orthogonal auf y steht]. Für den Winkel φ, den die Vektoren x und y einschließen, gilt

$$\cos\varphi = \frac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|} = \frac{-2\cdot 2 + 1\cdot 0 + 1\cdot(-2)}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{4+4}} = \frac{-6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}} = -\sqrt{\frac{6}{8}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Hieraus folgt $\varphi = \frac{5\pi}{6}$. Der Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms lautet

$$\|x \times y\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}.$$

Aufgabe 5

Die beiden Vektoren haben offenbar Norm 1 und stehen senkrecht aufeinander. Das Kreuzprodukt dieser Vektoren ist orthogonal zu beiden und hat zudem Norm 1 (denn $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\varphi$, wobei φ der Winkel zwischen den Vektoren a und b ist). Wir wählen also

$$\frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

als dritten Vektor.

Aufgabe 6

Zunächst zur Matrix A: Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. Dieses lautet

$$\det\begin{pmatrix} 22-\lambda & -2 & -4 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} =_{[Z_1 \to Z_1 - Z_2]} \det\begin{pmatrix} 18-\lambda & -18+\lambda & 0 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_1 \to S_1 + S_2]} \det\begin{pmatrix} 0 & -18+\lambda & 0 \\ 20-\lambda & 16-\lambda & -4 \\ 1 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } Z_1]} (18-\lambda)\det\begin{pmatrix} 20-\lambda & -4 \\ 1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (18-\lambda)\big((20-\lambda)(16-\lambda)+4\big) = (18-\lambda)\big(\lambda^2 - 36\lambda + 324\big) = -(\lambda-18)^3.$$

Wegen $\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 18$ besitzt die Matrix A nur den Eigenwert 18; dieser hat die algebraische Vielfachheit 3. Der zugehörige Eigenraum $E_A(18)$ ist die Menge aller $x \in \mathbb{C}^3$ mit $Ax = 18x$ bzw. $(A - 18I_3)x = 0$. Zur Berechnung des Kerns von

$$A - 18I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

verwenden wir Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - \frac{1}{2}Z_1]{Z_2 \to Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to \frac{1}{4}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks ab

$$E_A(18) = \operatorname{Kern}(A - 18I_3) = \{s\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{C}\} = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Der Eigenwert 18 hat die geometrische Vielfachheit 2, weil der Eigenraum $E_A(18)$ zweidimensional ist. Da die geometrische und algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 18 nicht übereinstimmen, ist A nicht diagonalisierbar.

Jetzt zur Matrix B: Wir berechnen das zugehörige charakteristische Polynom

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =_{\left[\substack{Z_1 \to Z_1 + (1-\lambda)Z_3 \\ Z_2 \to Z_2 + 2Z_3}\right]} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ 0 & -\lambda & 2-2\lambda \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. n. } S_1]} -\det\begin{pmatrix} 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ -\lambda & 2-2\lambda \end{pmatrix} = -\big(2 - 2\lambda - \lambda^2(1-\lambda)\big) = (\lambda^2 - 2)(1-\lambda)\,.$$

Wegen $\chi_B(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ hat die Matrix B die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. Diese haben jeweils die algebraische Vielfachheit 1.
Wir bestimmen nun den Eigenraum $E_B(1)$ zu $\lambda_1 = 1$, also die Menge aller $x \in \mathbb{C}^3$ mit $(B - I_3)x = 0$:

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_2 \to Z_2 + 2Z_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to -Z_1,\, Z_2 \to -Z_2]{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$E_B(1) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Der Eigenwert 1 besitzt die geometrische Vielfachheit 1, weil der zugehörige Eigenraum eindimensional ist.
Schließlich müssen wir noch die zu den beiden Eigenwerten $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$ gehörenden Eigenräume bestimmen. Analoges Vorgehen wie eben ergibt

$$E_B(\sqrt{2}\,) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-2 \\ 1 \end{pmatrix}\} \qquad \text{und} \qquad E_B(-\sqrt{2}\,) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-2 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Die geometrische Vielfachheit von $\sqrt{2}$ bzw. $-\sqrt{2}$ beträgt jeweils 1. Die Matrix B ist diagonalisierbar, weil für jeden Eigenwert von B geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen.

Aufgabe 7

Wir berechnen das charakteristische Polynom von A: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4)$

$$= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =_{\left[\substack{Z_3\to Z_3+Z_2 \\ Z_4\to Z_4-Z_2}\right]} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_2\to S_2+S_4]} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw.} Z_4]} (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_2\to S_2-S_3]} (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw.} Z_3]} (4-\lambda)^2\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^2\big((3-\lambda)(1-\lambda)-3\big) = (4-\lambda)^2(\lambda^2-4\lambda) = \lambda(\lambda-4)^3.$$

Die Matrix A besitzt also die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 4$ (mit algebraischer Vielfachheit 3). Wir bestimmen nun die Eigenräume:
Für $\lambda_1 = 0$ müssen wir das Gleichungssystem $(A - 0I_4)x = 0$, also $Ax = 0$ lösen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3\to Z_3+Z_2 \\ Z_4\to Z_4-Z_2}]{Z_1\to Z_1-3Z_2} \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4\to Z_4+Z_3]{Z_1\to Z_1+2Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir x_4 beliebig, so folgt aus der ersten/letzten Zeile $x_3 = -x_4$, aus der dritten $x_2 = x_4$ und aus der zweiten dann $x_1 = -x_4$. Wir haben also den eindimensionalen Eigenraum

$$E_A(0) = \operatorname{lin}\{c_1\}\,, \qquad \text{wobei} \quad c_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt zu $\lambda_2 = 4$:

$$A - 4I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3\to Z_3-Z_1 \\ Z_4\to Z_4+Z_1}]{Z_2\to Z_2+Z_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1\to -Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$E_A(4) = \operatorname{lin}\{c_2, c_3, c_4\}\,, \qquad c_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist als symmetrische Matrix diagonalisierbar. Da c_1 eine Basis von $E_A(0)$ und c_2, c_3, c_4 eine Basis von $E_A(4)$ ist, gilt für die Matrix S mit den Spalten c_1, c_2, c_3, c_4

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Da $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ symmetrisch ist, gibt es eine sogar orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Um eine solches P anzugeben, bestimmen wir jeweils eine Orthonormalbasis der Eigenräume.

Eine Orthonormalbasis von $E_A(0)$ ist gegeben durch $b_1 := \frac{1}{\|c_1\|}\, c_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $E_A(4)$ verwenden wir das Gram-Schmidt-Verfahren :

$$b_2 := \frac{1}{\|c_2\|}\, c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{b}_3 := c_3 - (c_3|b_2)b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_3 := \frac{1}{\|\widetilde{b}_3\|}\, \widetilde{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{b}_4 := c_4 - (c_4|b_2)b_2 - (c_4|b_3)b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$b_4 := \frac{1}{\|\widetilde{b}_4\|}\, \widetilde{b}_4 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Somit bilden b_2, b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von $E_A(4)$.
Besitzt die Matrix P die Spalten b_1, b_2, b_3, b_4, dann ist P orthogonal (d.h. $P^{-1} = P^T$) und es gilt

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$