Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I.Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2015
04.05.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{\sqrt{k}}$ die Fourierreihe einer 2π-periodischen, über $[-\pi, \pi]$ integrierbaren Funktion?

Hinweis: Argumentieren Sie mit der Besselschen Ungleichung.

Aufgabe 2

Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare und 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit Fourierkoeffizienten c_k, $k \in \mathbb{Z}$. Nach dem Darstellungssatz ist dann für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}\,.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik\, c_k e^{ikt}\,.$$

Aufgabe 3

Sei $a > 0$ und $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion von exponentieller Ordnung γ. Zeigen Sie, dass die Funktion $t \mapsto f(at)$ von exponentieller Ordnung γa ist und dass gilt

$$\mathscr{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}\mathscr{L}\{f\}\Big(\frac{s}{a}\Big) \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(s) > \gamma a\,.$$

Aufgabe 4

Gegeben seien die Vektoren $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $x \times y$, $(x \times y|x)$, den Winkel, den die Vektoren x und y einschließen, sowie den Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 5

Ergänzen Sie einen dritten Vektor so, dass die Vektoren die Spalten einer orthogonalen Matrix bilden.

$$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

— bitte wenden —

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die Eigenwerte? Welche Matrix ist diagonalisierbar?

Aufgabe 7

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und geben Sie eine reguläre Matrix S an so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.