Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. Semjon Wugalter

Sommersemester 2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inkl. Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Für jedes α ist die reelle Matrix A_α symmetrisch; nach dem Satz in 16.8 gibt es eine orthogonale Matrix P so, dass $P^T A_\alpha P$ Diagonalgestalt hat. Wir wissen zudem: Bei jedem derartigen P stehen in der Diagonale von $P^T A_\alpha P$ die Eigenwerte von A. Die Frage lautet also: Für welche α besitzt A_α die Eigenwerte 1, 2 und 3? Die Matrix

$$A_\alpha - I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & -1+\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_1} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist (unabhängig von α) singulär; somit ist 1 stets ein Eigenwert von A_α. Wegen

$$A_\alpha - 2I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & -3+\alpha \end{pmatrix}$$

ist 2 stets ein Eigenwert von A_α (unabhängig von α). Schließlich haben wir noch

$$A_\alpha - 3I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & -5+\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_1} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist genau dann singulär, wenn die erste und dritte Zeile linear abhängig sind, wenn also $-5+\alpha = 1-\alpha$ gilt, d. h. $\alpha = 3$. Somit hat A_α nur im Fall $\alpha = 3$ den Eigenwert 3.
Bemerkung: Nachdem wir gezeigt haben, dass 1 und 2 Eigenwerte von A_α sind, können wir bei der Untersuchung, wann die Matrix A_α die Eigenwerte $1, 2, 3$ besitzt, auch auf die Betrachtung von $A_\alpha - 3I_3$ verzichten und stattdessen mit Hilfe der Spur von A_α argumentieren. Da die Spur einer Matrix gleich der Summe ihrer Eigenwerte (gemäß ihrer algebraischen Vielfachheiten wiederholt, vgl. Folgerung in 16.9) ist, erhalten wir

$$3 \text{ ist Eigenwert von } A_\alpha \iff \operatorname{Spur}(A_\alpha) = 6 \iff \tfrac{1}{2}\big((1+\alpha)+4+(1+\alpha)\big) = 6 \iff \alpha = 3.$$

Fazit: Genau für $\alpha = 3$ gibt es eine orthogonale Matrix P mit $P^T A_\alpha P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Setzen wir $\alpha = 3$ in die Matrizen ein, die wir oben erhalten haben, so können wir ablesen:

$$E_{A_3}(1) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \qquad E_{A_3}(2) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \qquad E_{A_3}(3) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Die Spalten der Matrix P sind dann normierte Eigenvektoren zu den drei Eigenwerten:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Für die symmetrische Matrix A_β verwenden wir das Kriterium von Hurwitz aus 16.10. Es gilt

$$1 > 0 \qquad \text{und} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0\,;$$

die ersten beiden Hauptunterdeterminanten sind also positiv. Die Matrix A_β ist somit genau dann positiv definit, wenn ihre Determinante > 0 ausfällt. Wegen

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} =_{[Z_2 \to Z_2 + 2Z_1]} \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } S_1]} \det\begin{pmatrix} 4 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = 4 - \beta^2$$

ergibt sich: A_β ist positiv definit $\iff 0 < 4 - \beta^2 \iff |\beta| < 2 \iff -2 < \beta < 2$.

Nun zur Matrix B: Für $n = 1$ ist $B = (1)$ positiv definit. Im Fall $n \geqslant 2$ ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & 1 & 2 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Für $x := e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$Bx = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad x^T Bx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0,$$

während sich für $y := e_1 - e_2 = (1, -1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$$By = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad y^T By = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

ergibt. Somit ist die Matrix B indefinit.

Bemerkung: Um zu zeigen, dass B nicht positiv definit ist, kann man auch mit dem Kriterium von Hurwitz argumentieren: Da für die zweite Hauptunterdeterminante $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 4 = -3 < 0$ gilt, ist B nicht positiv definit.

Aufgabe 3

Das System

$$\begin{aligned} u' &= 8u - 6v, \\ v' &= 9u - 7v \end{aligned}$$

ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Wir zeigen, dass A diagonalisierbar ist. Dazu berechnen wir das charakteristische Polynom von A

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & -6 \\ 9 & -7-\lambda \end{pmatrix} = (8-\lambda)(-7-\lambda) + 9 \cdot 6 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2).$$

Damit sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ die Eigenwerte von A. Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$E_A(-1) = \mathrm{Kern}(A + I_2) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

und

$$E_A(2) = \mathrm{Kern}(A - 2I_2) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 9 & -9 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Da die Eigenvektoren $(2,3), (1,1)$ von A eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden, ist A diagonalisierbar und für die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =: D,$$

woraus $A = SDS^{-1}$ folgt. Außerdem ist

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = SDS^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn

$$S^{-1} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = DS^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

bzw. wenn

$$\begin{pmatrix} -u' + v' \\ 3u' - 2v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u + v \\ 3u - 2v \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Sind $\widetilde{u} := -u + v$ und $\widetilde{v} := 3u - 2v$, also $\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} := S^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, gesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widetilde{u}' \\ \widetilde{v}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} \quad &\iff \quad \widetilde{u}' = -\widetilde{u} \ \text{ und } \ \widetilde{v}' = 2\widetilde{v} \\ &\iff \quad \widetilde{u}(x) = c_1 e^{-x} \ \text{ und } \ \widetilde{v} = c_2 e^{2x} \quad \text{für } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \iff \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\widetilde{u} + \widetilde{v} \\ 3\widetilde{u} + \widetilde{v} \end{pmatrix}$$

sind

$$\begin{aligned} u(x) &= 2\widetilde{u}(x) + \widetilde{v}(x) = 2c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \\ v(x) &= 3\widetilde{u}(x) + \widetilde{v}(x) = 3c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die Lösungen des Systems (1).