Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2015
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wir zeigen zuerst: Ist $n \in \mathbb{N}_0$, dann ist die Funktion $f_n(t) := t^n$ von exponentieller Ordnung ε für jedes beliebig vorgegebene $\varepsilon > 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Stellen wir die Exponentialfunktion als Potenzreihe dar, erhalten wir

$$e^{\varepsilon t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon t)^k}{k!} = 1 + \varepsilon t + \frac{(\varepsilon t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\varepsilon t)^n}{n!} + \ldots \geqslant \frac{(\varepsilon t)^n}{n!}$$

für alle $t \geqslant 0$. Folglich ergibt sich mit $M := \frac{n!}{\varepsilon^n}$ die Abschätzung

$$t^n \leqslant M e^{\varepsilon t}$$

für alle $t \geqslant 0$. Also ist die Funktion f_n von exponentieller Ordnung ε.

Gegeben seien nun $n \in \mathbb{N}_0$ und $s_0 \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s_0) > 0$. Wir wollen die Existenz von $\mathscr{L}\{f_n\}(s_0)$ nachweisen.

Wie eben gesehen, ist $f_n(t) = t^n$ von exponentieller Ordnung ε für jedes beliebig vorgegebene $\varepsilon > 0$. Insbesondere ist dann f_n von exponentieller Ordnung $\varepsilon_0 := \mathrm{Re}(s_0)/2$. Das Integral $\int_0^\infty f_n(t) e^{-st}\,dt$ konvergiert (sogar absolut) für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \varepsilon_0$. Aufgrund von $\mathrm{Re}(s_0) > \varepsilon$ existiert demnach $\mathscr{L}\{f_n\}(s_0)$.

b) Die Behauptung zeigen wir durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$.

IA: $n = 0$. Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 0$ gilt

$$\mathscr{L}\{f_0\}(s) = \mathscr{L}\{t^0\}(s) = \mathscr{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}\,.$$

IS: Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$. Für dieses n gelte: $\mathscr{L}\{f_n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ (IV). Mit partieller Integration erhalten wir für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f_{n+1}\}(s) &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} t^{n+1}\,dt = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s}\, t^{n+1}\right]_{t=0}^{b} + \frac{n+1}{s} \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} t^n\,dt \\ &= 0 + \frac{n+1}{s} \mathscr{L}\{f_n\}(s) \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n+1}{s}\,\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{(n+1)+1}}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Mit $g(t) := t^2 + bt + c$ erhält man nach Aufgabe 1 aufgrund der Linearität von $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}\{g\}(s) = \mathscr{L}\{t^2\}(s) + b\,\mathscr{L}\{t\}(s) + c\,\mathscr{L}\{1\}(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 0\,,$$

und wegen $f(t) = e^{at} g(t)$ gilt dann nach der Dämpfungsregel

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \mathscr{L}\{g\}(s-a) = \frac{2}{(s-a)^3} + \frac{b}{(s-a)^2} + \frac{c}{s-a} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > a\,.$$

b) Wir benutzen die Darstellung $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$. Nach der Dämpfungsregel ist

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\cos(\omega t)\}(s) &= \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}\{e^{i\omega t}\}(s) + \mathscr{L}\{e^{-i\omega t}\}(s)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}\{\sigma\}(s-i\omega) + \mathscr{L}\{\sigma\}(s+i\omega)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\Big) = \frac{1}{2}\frac{(s+i\omega)+(s-i\omega)}{s^2-i^2\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 0\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: a) Mit $\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$ erhält man $\mathscr{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$.

c) Es ist $\sinh(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$. Da die Laplacetransformation linear ist, bekommen wir nach der Dämpfungsregel für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > |\omega|$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f\}(s) &= \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}\{e^{\omega t}\}(s) - \mathscr{L}\{e^{-\omega t}\}(s)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}\{\sigma\}(s-\omega) - \mathscr{L}\{\sigma\}(s+\omega)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}\Big) = \frac{1}{2}\frac{(s+\omega)-(s-\omega)}{s^2-\omega^2} = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}\,.\end{aligned}$$

Wir mussten hier $\mathrm{Re}(s) > |\omega|$ fordern, damit sowohl $\mathscr{L}\{e^{\omega t}\}(s)$ als auch $\mathscr{L}\{e^{-\omega t}\}(s)$ existieren. Bekanntlich liegt Konvergenz von $\mathscr{L}\{e^{\omega t}\}(s)$ nur für $\mathrm{Re}(s) > \omega$ vor, entsprechend konvergiert $\mathscr{L}\{e^{-\omega t}\}(s)$ nur für $\mathrm{Re}(s) > -\omega$. Beide Bedingungen an s sind für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > |\omega|$ erfüllt.

d) Wir drücken die Funktion f zunächst mit Hilfe der Exponentialfunktion aus: Es ist

$$f(t) = \sinh^2(\omega t) = \left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2\omega t} - 2 + e^{-2\omega t}}{4}\,.$$

Damit folgt für $\mathrm{Re}(s) > 2|\omega|$ (analoge Begründung wie zuvor im c)-Teil)

$$4\,\mathscr{L}\{f\}(s) = \mathscr{L}\{e^{2\omega t}\}(s) - \mathscr{L}\{2\}(s) + \mathscr{L}\{e^{-2\omega t}\}(s) = \frac{1}{s-2\omega} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s+2\omega}\,,$$

und als Endergebnis erhalten wir für $\mathrm{Re}(s) > 2|\omega|$

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-2\omega} + \frac{1}{s+2\omega}\right) - \frac{1}{2s} = \frac{s}{2(s^2-4\omega^2)} - \frac{1}{2s} = \frac{2\omega^2}{s(s^2-4\omega^2)}\,.$$

Aufgabe 3

a) Für $f(t) := e^{at}$ ergibt sich $\mathscr{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$.

b) Wir definieren zunächst $g(t) := e^{-2t}$. Dann gilt $\mathscr{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s+2}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > -2$. Ist $f(t) := (\tau_3 g)(t) = \begin{cases} e^{-2(t-3)}, & t \geqslant 3 \\ 0\,, & t \in [0,3) \end{cases}$ gesetzt, dann gilt nach der Verschiebungsregel

$$\frac{e^{-3s}}{s+2} = e^{-3s}\mathscr{L}\{g\}(s) = \mathscr{L}\{f\}(s)\,.$$

c) Aufgrund von $\mathscr{L}\{\cos(2t)\}(s) = \frac{s}{s^2+2^2}$ und $\mathscr{L}\{\sin(2t)\}(s) = \frac{2}{s^2+2^2}$ bekommen wir mit Hilfe der Linearität von $\mathscr{L}$ und der Dämpfungsregel

$$\begin{aligned}\frac{s+3}{(s+1)^2+4} &= \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{2}{(s+1)^2+4} = \mathscr{L}\{\cos(2t)\}(s+1) + \mathscr{L}\{\sin(2t)\}(s+1)\\ &= \mathscr{L}\{\cos(2t) + \sin(2t)\}(s+1) = \mathscr{L}\{e^{-t}(\cos(2t) + \sin(2t))\}(s)\,.\end{aligned}$$

Demnach gilt $\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2+4}$ für $f(t) := e^{-t}(\cos(2t) + \sin(2t))$.

Aufgabe 4

Um eine Funktion $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ mit

$$y(t) = t^3 + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau \quad \text{für alle } t \geqslant 0$$

anzugeben, schreiben wir die rechte Seite mit Hilfe der Faltung

$$y(t) = t^3 + (y * \sin)(t)$$

und wenden die Faltungsregel an. Für hinreichend große $\mathrm{Re}(s)$ gilt

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \mathscr{L}\{t^3\}(s) + \mathscr{L}\{y * \sin\}(s) = \mathscr{L}\{t^3\}(s) + \mathscr{L}\{y\}(s)\,\mathscr{L}\{\sin\}(s)\,.$$

Hieraus folgt wegen $\mathscr{L}\{t^3\}(s) = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$ und $\mathscr{L}\{\sin\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{6}{s^4} + \mathscr{L}\{y\}(s)\frac{1}{s^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{L}\{y\}(s)\Big(1 - \frac{1}{s^2+1}\Big) = \frac{6}{s^4}$$

bzw.

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{s^2+1}{s^2}\cdot\frac{6}{s^4} = \frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^6}\,.$$

Schließlich erhalten wir mit $\mathscr{L}\{t^5\}(s) = \frac{5!}{s^6}$

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \mathscr{L}\{t^3\}(s) + \frac{6}{5!}\,\mathscr{L}\{t^5\}(s) = \mathscr{L}\{t^3 + t^5/20\}(s),$$

d.h. $y(t) = t^3 + \frac{1}{20}t^5$, $t \geqslant 0$, löst die gegebene Gleichung.