Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2015
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Gemäß Beispiel in der Vorlesung [mit $a(x) = \sin x$] ist jede Lösung von $y'(x) = y(x) \cdot \sin x$ gegeben durch $y(x) = ce^{-\cos x}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Dass dies tatsächlich alle Lösungen sind, kann man auch folgendermaßen einsehen: Ist w eine weitere Funktion, die der Gleichung $w'(x) = w(x) \cdot \sin x$ genügt, so gilt

$$\left(\frac{w(x)}{y(x)}\right)' = \frac{w'(x)y(x) - w(x)y'(x)}{y^2(x)} = \frac{w(x)\sin(x)y(x) - w(x)y(x)\sin(x)}{y^2(x)} = 0.$$

Der Quotient w/y ist also konstant, d.h. es gilt $w(x) = Cy(x)$ mit $C \in \mathbb{R}$.

b) Differentiation der Funktionen auf beiden Seiten der Gleichung liefert für jedes $x \in (-1, 1)$

$$y'(x) = y(x).$$

(Beachte: y ist differenzierbar, weil die rechte Seite $x \mapsto \int_0^x y(t)\,dt$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung differenzierbar ist.)

Laut Beispiel (1) in 18.3 [mit $a(x) = 1$] ist $y(x) = ce^x$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Gemäß der ursprünglichen Gleichung gilt insbesondere für $x = 0$: $c = y(0) = \int_0^0 y(t)\,dt = 0$, d.h. nur $y(x) = 0$ für alle $x \in [-1, 1]$ erfüllt die gegebene Gleichung.

Aufgabe 2

a) Die homogene Gleichung $y''' - y = 0$ besitzt das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

mit den einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$. Somit ist

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^x\,, \qquad \varphi_2(x) = e^{-x/2}\cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x\right), \qquad \varphi_3(x) = e^{-x/2}\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x\right)$$

ein zugehöriges Fundamentalsystem, und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet $y = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3$ mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Da die rechte Seite der inhomogenen Gleichung die Gestalt $q(x)e^{0x}$ hat, wobei q ein Polynom vom Grad 2 ist, und 0 keine Nullstelle von p ist, können wir eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung mit dem entsprechenden Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x) = ax^2 + bx + c$ erhalten. Dieser liefert

$$y_{\mathrm{p}}''' - y_{\mathrm{p}} = 0 - (ax^2 + bx + c) \stackrel{!}{=} 1 + x^2\,,$$

und wir schließen $a = -1$, $b = 0$ und $c = -1$, bekommen also $y_{\mathrm{p}}(x) = -x^2 - 1$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit

$$y(x) = -x^2 - 1 + c_1 e^x + e^{-x/2}\left[c_2\cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x\right) + c_3\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x\right)\right] \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})\,.$$

b) Hier hat das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ die einfachen Nullstellen 1 und -1, d. h. die homogene Gleichung besitzt die allgemeine Lösung $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist diesmal von der Form $q(x)e^{2x}$ mit einem Polynom q vom Grad 1. Da 2 keine Nullstelle von p ist, machen wir den Ansatz $y_\mathrm{p}(x) = (ax+b)e^{2x}$ für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Es gilt dann

$$\begin{aligned} y_\mathrm{p}' &= ae^{2x} + 2(ax+b)e^{2x} = (2ax + a + 2b)e^{2x}\,, \\ y_\mathrm{p}'' &= 2ae^{2x} + 2(2ax+a+2b)e^{2x} = (4ax + 4a + 4b)e^{2x}\,, \end{aligned}$$

und damit ergibt sich

$$y_\mathrm{p}'' - y_\mathrm{p} = (4ax+4a+4b)e^{2x} - (ax+b)e^{2x} = (3ax+4a+3b)e^{2x} \stackrel{!}{=} xe^{2x}\,,$$

was auf $a = \frac{1}{3}$ und $b = -\frac{4}{9}$ führt. Mit $y_\mathrm{p}(x) = (\frac{1}{3}x - \frac{4}{9})e^{2x}$ erhält man als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung schließlich

$$y(x) = (\tfrac{1}{3}x - \tfrac{4}{9})e^{2x} + c_1 e^x + c_2 e^{-x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})\,.$$

c) Die homogene Gleichung haben wir schon in **b)** behandelt. Da die rechte Seite der inhomogenen Gleichung diesmal xe^{1x} lautet und 1 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms p mit Vielfachheit $\nu = 1$ ist, reicht es hier nicht, einen Ansatz der Form $(ax+b)e^x$ zu machen; vielmehr muss man $y_\mathrm{p}(x) = x^\nu(ax+b)e^x = (ax^2+bx)e^x$ betrachten. Dann ist

$$\begin{aligned} y_\mathrm{p}' &= (2ax+b)e^x + (ax^2+bx)e^x = \big(ax^2 + (2a+b)x + b\big)e^x\,, \\ y_\mathrm{p}'' &= (2ax+2a+b)e^x + \big(ax^2+(2a+b)x+b\big)e^x = \big(ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b\big)e^x\,, \end{aligned}$$

d. h. mit diesem Ansatz hat man

$$y_\mathrm{p}'' - y_\mathrm{p} = \big(ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b - ax^2 - bx\big)e^x = (4ax + 2a + 2b)e^x \stackrel{!}{=} xe^x\,.$$

Koeffizientenvergleich liefert $a = \frac{1}{4}$ und $b = -\frac{1}{4}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = \tfrac{1}{4}(x^2 - x)e^x + c_1 e^x + c_2 e^{-x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})\,.$$

Damit ergibt sich $y(0) = c_1 + c_2$ und $y'(x) = \frac{1}{4}(2x-1)e^x + \frac{1}{4}(x^2-x)e^x + c_1 e^x - c_2 e^{-x}$, also $y'(0) = -\frac{1}{4} + c_1 - c_2$. Beides soll $= 0$ sein, das bedeutet $c_1 = -c_2 = \frac{1}{8}$. Das Anfangswertproblem hat somit die Lösung

$$y(x) = \tfrac{1}{4}(x^2-x)e^x + \tfrac{1}{8}e^x - \tfrac{1}{8}e^{-x} = \tfrac{1}{8}(2x^2 - 2x + 1)e^x - \tfrac{1}{8}e^{-x}\,.$$

d) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$ hat die einfachen Nullstellen $0, 1$ und 3, d. h. die homogene Gleichung besitzt

$$y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^x + c_3 e^{3x} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

als allgemeine Lösung. Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist von der Form

$$\big(2\cos(1x) + 4\sin(1x)\big)e^{0x}\,.$$

Da $0 + 1i$ keine Nullstelle von p ist, können wir als Ansatz für eine Lösung der inhomogenen Gleichung $y_\mathrm{p}(x) = a\cos(1x) + b\sin(1x)$ wählen. Es gilt

$$y_\mathrm{p}' = -a\sin x + b\cos x\,, \qquad y_\mathrm{p}'' = -a\cos x - b\sin x\,, \qquad y_\mathrm{p}''' = a\sin x - b\cos x\,,$$

und damit ergibt sich

$$y_\mathrm{p}''' - 4y_\mathrm{p}'' + 3y_\mathrm{p}' = (a + 4b - 3a)\sin x + (-b + 4a + 3b)\cos x \stackrel{!}{=} 2\cos x + 4\sin x\,.$$

Dies liefert die Gleichungen

$$-2a + 4b = 4 \qquad \text{und} \qquad 4a + 2b = 2\,,$$

also $a = 0$ und $b = 1$. Somit haben wir $y_{\mathrm{p}}(x) = \sin x$ und als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = \sin x + c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{3x} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})\,.$$

Bemerkung: Mit $z := y'$ könnte man auch $z'' - 4z' + 3z = 2\cos x + 4\sin x$ betrachten und die ermittelte Lösung z dann noch integrieren.

Aufgabe 3

a) Bei dieser linearen Differentialgleichung 1. Ordnung betrachten wir zunächst die zugehörige homogene Gleichung

$$x^3 y' + (2 - 3x^2)y = 0, \qquad \text{also} \qquad y' = \Big(-\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x}\Big)y \quad \text{auf } (0, \infty)\,.$$

Diese besitzt die Lösungen $y(x) = Ce^{A(x)}$, wobei C ganz $\mathbb{R}$ durchläuft und A irgendeine Stammfunktion von $a(x) := -2/x^3 + 3/x$ ist. Dies bedeutet für $x > 0$

$$y(x) = C\exp\big(x^{-2} + 3\ln x\big) = Cx^3 e^{1/x^2} \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Eine spezielle Lösung y_{p} der inhomogenen Gleichung $x^3y' + (2-3x^2)y = x^3$ verschaffen wir uns mit der Methode der Variation der Konstanten: Wir machen den Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x) = C(x)y_{\mathrm{h}}(x)$ mit $y_{\mathrm{h}}(x) := x^3e^{1/x^2}$ und erhalten

$$\begin{aligned} x^3y_{\mathrm{p}}' + (2-3x^2)y_{\mathrm{p}} &= x^3\big(C'(x)y_{\mathrm{h}} + C(x)y_{\mathrm{h}}'\big) + (2-3x^2)C(x)y_{\mathrm{h}} \\ &= x^3C'(x)y_{\mathrm{h}} + \big(x^3y_{\mathrm{h}}' + (2-3x^2)y_{\mathrm{h}}\big)C(x) = x^3C'(x)y_{\mathrm{h}}\,. \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass y_{h} die homogene Gleichung löst. Damit y_{p} die inhomogene Gleichung löst, muss mithin $x^3C'(x)y_{\mathrm{h}} = x^3$ sein, d. h. es muss

$$C'(x) = 1/y_{\mathrm{h}}(x) = x^{-3}e^{-1/x^2}$$

gelten. Dies ist z.B. für $C(x) = \frac{1}{2}e^{-1/x^2}$ der Fall, und hiermit ergibt sich $y_{\mathrm{p}}(x) = \frac{1}{2}x^3$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung auf $(0, \infty)$ ist die Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung, also

$$y(x) = y_{\mathrm{p}}(x) + Cy_{\mathrm{h}}(x) = \tfrac{1}{2}x^3 + Cx^3e^{1/x^2} \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

b) Die zugehörige homogene Gleichung $y' = (-\cos x)y$ hat die allgemeine Lösung

$$y(x) = C\exp\Big(-\int \cos x\,dx\Big) = Ce^{-\sin x} \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Um eine spezielle Lösung y_{p} der inhomogenen Gleichung zu finden, machen wir den Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x) = C(x)e^{-\sin x}$ (Variation der Konstanten). Dann haben wir

$$y_{\mathrm{p}}' + y_{\mathrm{p}}\cos x = \big(C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x\big) + C(x)e^{-\sin x}\cos x = C'(x)e^{-\sin x}\,.$$

Somit ist y_{p} eine Lösung der inhomogenen Gleichung, wenn $C'(x)e^{-\sin x} = \sin x\cos x$ gilt, d. h. wir suchen eine Funktion C mit

$$C'(x) = (\sin x\cos x)e^{\sin x}\,.$$

Partielle Integration (mit $u(x) = \sin x$ und $v'(x) = (\cos x)e^{\sin x}$) liefert

$$C(x) = (\sin x)e^{\sin x} - \int (\cos x)e^{\sin x}\, dx = (\sin x)e^{\sin x} - e^{\sin x} = (\sin x - 1)e^{\sin x}\,.$$

Als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung haben wir damit

$$y_{\mathrm{p}}(x) = C(x)e^{-\sin x} = \sin x - 1\,,$$

und die allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung lautet dann

$$y(x) = y_{\mathrm{p}}(x) + Ce^{-\sin x} = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x} \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Hier gilt $y(0) = -1 + C$. Die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ist daher für $C = 2$ erfüllt; das Anfangswertproblem hat folglich die Lösung $y(x) = \sin x - 1 + 2e^{-\sin x}$.

Bemerkung: Man könnte hier natürlich auch die Variation-der-Konstanten-Formel verwenden.

c) Hier handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung 3-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung $y''' + 3y'' + \frac{9}{4}\,y' = 0$

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + \tfrac{9}{4}\,\lambda = \lambda\big(\lambda^2 + 3\lambda + \tfrac{9}{4}\big) = \lambda\big(\lambda + \tfrac{3}{2}\big)^2$$

besitzt die einfache Nullstelle $\lambda_1 = 0$ und die zweifache Nullstelle $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$. Somit ist ein Fundamentalsystem von $y''' + 3y'' + \frac{9}{4}\,y' = 0$ gegeben durch

$$e^{0\cdot x},\ e^{-\frac{3}{2}x},\ xe^{-\frac{3}{2}x}$$

und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''' + 3y'' + \frac{9}{4}\,y' = 0$ lautet

$$y(x) = c_1 + c_2e^{-\frac{3}{2}x} + c_3xe^{-\frac{3}{2}x} \qquad \text{für Konstanten } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\tfrac{3}{2}c_2e^{-\frac{3}{2}x} + c_3e^{-\frac{3}{2}x} - \tfrac{3}{2}c_3xe^{-\frac{3}{2}x}, \\ y''(x) &= \tfrac{9}{4}c_2e^{-\frac{3}{2}x} - 3c_3e^{-\frac{3}{2}x} + \tfrac{9}{4}c_3xe^{-\frac{3}{2}x}. \end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 \overset{!}{=} 0, \\ y'(0) &= -\tfrac{3}{2}c_2 + c_3 \overset{!}{=} 0, \\ y''(0) &= \tfrac{9}{4}c_2 - 3c_3 \overset{!}{=} 1. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in c_1, c_2, c_3, welches die eindeutige Lösung $c_1 = \frac{4}{9}$, $c_2 = -\frac{4}{9}, c_3 = -\frac{2}{3}$ besitzt. Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = \tfrac{4}{9} - \tfrac{4}{9}e^{-\frac{3}{2}x} - \tfrac{2}{3}xe^{-\frac{3}{2}x}.$$