Karlsruhe Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Der Ansatz für eine Partialbruchzerlegung richtet sich nach den Nullstellen des Nennerpolynoms $x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2)$. Diese sind $-1, 0, 2$. Jede dieser Nullstellen ist einfach. Demzufolge lautet der Ansatz der Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}\,.$$

Um die Koeffizienten A, B, C zu ermitteln, haben wir verschiedene Möglichkeiten.

1. Möglichkeit: Wir multiplizieren obige Gleichung mit dem Hauptnenner $x(x+1)(x-2)$

$$x^2 + x - 1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$$

und setzen die Nullstellen des Nennerpolynoms ein

$$\begin{aligned}
x = 0: &\quad -1 = -2A &&\iff A = 1/2\\
x = -1: &\quad -1 = 3B &&\iff B = -1/3\\
x = 2: &\quad 5 = 6C &&\iff C = 5/6
\end{aligned}$$

2. Möglichkeit: Um A, den Koeffizienten des zur Nullstelle $\lambda = 0$ gehörenden Terms $\frac{1}{x}$, zu ermitteln, multipliziert man $\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)}$ mit $x - \lambda = x$ und bildet dann den Grenzwert $x \to \lambda$, also $x \to 0$. Formal ausgedrückt bedeutet dies

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)(x-2)} \cdot x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x-2)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}\,.$$

Entsprechend kann man für B und C verfahren

$$\begin{aligned}
B &= \lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)(x-2)} \cdot (x+1)\right) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2 + x - 1}{x(x-2)} = -\frac{1}{3}\,,\\
C &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)(x-2)} \cdot (x-2)\right) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)} = \frac{5}{6}\,.
\end{aligned}$$

Mit den Koeffizienten $A = 1/2$, $B = -1/3$ sowie $C = 5/6$ ergibt sich

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{5}{6(x-2)}\,.$$

b) Wegen $(x+1)^2(x^3+1) = (x+1)^3(x^2-x+1) = (x+1)^3(x-\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2})(x-\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2})$ sind -1 eine dreifache Nullstelle und $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ bzw. $\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$ jeweils eine einfache Nullstelle des Nennerpolynoms. Deshalb lautet der Ansatz für die komplexe Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^3+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x - \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}} + \frac{E}{x - \frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}}\,.$$

(In der Notation der Vorlesung geschrieben: $P(x) = 1$, $Q(x) = (x+1)^2(x^3+1)$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ und $\lambda_3 = \frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$, $k_1 = 3$, $k_2 = k_3 = 1$ sowie $\alpha_1^{(1)} = A$, $\alpha_2^{(1)} = B$ $\alpha_3^{(1)} = C$, $\alpha_1^{(2)} = D$ und $\alpha_1^{(3)} = E$.) Ergebnis: $A = \frac{2}{9}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = -\frac{1}{9}$, $E = -\frac{1}{9}$.
Der Ansatz für die reelle Partialbruchzerlegung ist

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^3+1)} = \frac{1}{(x+1)^3(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{\widetilde{D}x + \widetilde{E}}{x^2-x+1}\,.$$

Ergebnis: $A = \frac{2}{9}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$, $\widetilde{D} = -\frac{2}{9}$, $\widetilde{E} = \frac{1}{9}$.

Aufgabe 2

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{s^2+2s} = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s+2}$$

erkennen wir für $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\frac{1}{s^2+2s} = \frac{1}{2}\mathscr{L}\{1\}(s) - \frac{1}{2}\mathscr{L}\{e^{-2t}\}(s) = \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\Big\}(s)\,.$$

Alternativ: Wir können den b)-Teil auch lösen, indem wir die Dämpfungsregel auf das Resultat des a)-Teils anwenden. Es gilt nämlich für alle $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^2+2s} = \frac{1}{(s+1)^2-1} &\overset{\textbf{a)}}{=} \mathscr{L}\big\{\sinh(t)\big\}(s+1) = \mathscr{L}\big\{e^{-1\cdot t}\sinh(t)\big\}(s) \\ &= \mathscr{L}\Big\{e^{-1\cdot t}\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\Big\}(s) = \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\Big\}(s)\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Aus der Vorlesung kennen wir die Identität

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n\mathscr{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

für eine exponentiell beschränkte, n-mal stetig differenzierbare Funktion f und hinreichend große $\operatorname{Re}(s)$. Insbesondere haben wir also

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - y(0) \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - sy(0) - y'(0)\,.$$

Für die Lösung y mit den Anfangswerten $y(0) = 7$ und $y'(0) = 1$ bedeutet dies

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - 7 \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - 7s - 1\,.$$

Somit ergibt sich für die Lösung y des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\frac{12}{s} &= \mathscr{L}\{12\}(s) = \mathscr{L}\{y''+4y'+3y\}(s) = (s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - 7s - 1) + 4(s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - 7) + 3\,\mathscr{L}\{y\}(s) \\ &= (s^2+4s+3)\mathscr{L}\{y\}(s) - 7s - 29\,,\end{aligned}$$

also

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{1}{s^2+4s+3}\left(7s + 29 + \frac{12}{s}\right) = \frac{7s^2+29s+12}{s(s+1)(s+3)}\,.$$

Nun wollen wir eine Partialbruchzerlegung durchführen; wir machen den Ansatz

$$\frac{7s^2+29s+12}{s(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3}\,.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit s und setzen $s = 0$ ein, so folgt $A = \frac{12}{3} = 4$. Multiplikation mit $s + 1$ und Einsetzen von $s = -1$ liefert $B = \frac{-10}{-2} = 5$, und ganz analog erhält man schließlich noch $C = \frac{-12}{6} = -2$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y\}(s) &= \frac{4}{s} + \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s+3} = \mathscr{L}\{4\}(s) + \mathscr{L}\{5e^{-t}\}(s) - \mathscr{L}\{2e^{-3t}\}(s) \\ &= \mathscr{L}\{4 + 5e^{-t} - 2e^{-3t}\}(s),\end{aligned}$$

und wir haben die Lösung y gefunden: Es ist

$$y(t) = 4 + 5e^{-t} - 2e^{-3t}.$$

b) Anwendung der Laplacetransformation auf die Gleichung unter Verwendung der Regeln

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - y(0) \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - sy(0) - y'(0)$$

ergibt

$$s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - 2s - 1 + \mathscr{L}\{y\}(s) = \mathscr{L}\{\sin 2x\}(s) = \frac{2}{s^2+4}.$$

Daraus folgt, dass

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2+1)(s^2+4)}.$$

gilt. Nun wollen wir eine Partialbruchzerlegung durchführen; wir machen den Ansatz

$$\frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

und bekommen, dass

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (4A+C)s + (4B+D).$$

Die letzte Gleichung hat die Lösung $A = 2, B = \frac{5}{3}, C = 0, D = -\frac{2}{3}$ Daraus folgt,dass

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{2s}{s^2+1} + \frac{\frac{5}{3}}{s^2+1} - \frac{\frac{2}{3}}{s^2+4}$$

und

$$y(x) = 2\cos x + \frac{5}{3}\sin x - \frac{1}{3}\sin 2x$$

gilt.

c) Man erhält mit $c := y'(0)$ für hinreichend große $\operatorname{Re}(s)$

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - 6 \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - 6s - c.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{6}{(s+1)^2} &= \mathscr{L}\{6te^{-t}\}(s) = \mathscr{L}\{y'' + 2y' + y\}(s) \\ &= (s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - 6s - c) + 2(s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - 6) + \mathscr{L}\{y\}(s) \\ &= (s^2 + 2s + 1)\mathscr{L}\{y\}(s) - 6s - c - 12.\end{aligned}$$

Für die Lösung y der Differentialgleichung mit $y(0) = 6$ und $y'(0) = c$ hat man also

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y\}(s) &= \frac{1}{s^2+2s+1}\left(6s + c + 12 + \frac{6}{(s+1)^2}\right) = \frac{6(s+1) + c + 6}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^4} \\ &= \frac{6}{s+1} + \frac{c+6}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^4}.\end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\frac{1}{(s+1)^{n+1}} = \frac{1}{n!}\,\mathscr{L}\{t^n\}(s+1) = \frac{1}{n!}\,\mathscr{L}\{e^{-t}t^n\}(s) \qquad (\mathrm{Re}(s) > -1, n \in \mathbb{N}_0)$$

schließt man

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{6}{s+1} + \frac{c+6}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^4} = \mathscr{L}\big\{6e^{-t} + (c+6)te^{-t} + t^3e^{-t}\big\}(s)\,,$$

d.h. es ist $y(t) = (6 + (c+6)t + t^3)e^{-t}$. Bei dieser Funktion gilt $y(1) = (13 + c)e^{-1}$, und für $c = 0$ wird die Bedingung $y(1) = 13/e$ erfüllt. Die Lösung des Problems ist demzufolge

$$y(t) = (6 + 6t + t^3)e^{-t}\,.$$