Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist die Funktion f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Im Punkt $(0,0)$ ist f auch stetig: Mit Hilfe von $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ [Diese Ungleichung folgt aus der binomischen Formel: $0 \leqslant (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \Rightarrow -xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ sowie $0 \leqslant (x-y)^2 = x^2-2xy+y^2 \Rightarrow xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$] ergibt sich für $(x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{x^2+y^2}\,|y| \leqslant \tfrac{1}{2}\,|y| \to 0 \qquad \text{für } (x,y) \to (0,0),$$

also gilt $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, d.h. f ist stetig in $(0,0)$.

Alternativ: Es gelte $(x_n,y_n) \to (0,0)$ mit $(x_n,y_n) \neq (0,0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $r_n > 0$ und $\varphi_n \in [0,2\pi)$ mit $(x_n,y_n) = (r_n\cos\varphi_n, r_n\sin\varphi_n)$. Es folgt

$$\begin{aligned} f(x_n,y_n) = f(r_n\cos\varphi_n, r_n\sin\varphi_n) &= \frac{(r_n\cos\varphi_n)(r_n\sin\varphi_n)^2}{(r_n\cos\varphi_n)^2+(r_n\sin\varphi_n)^2} \\ &= \frac{r_n^3\cos\varphi_n\sin^2\varphi_n}{r_n^2} = r_n\cos\varphi_n\sin^2\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,, \end{aligned}$$

weil $r_n \to 0$ strebt und die Folge $(\cos\varphi_n\sin^2\varphi_n)$ beschränkt ist.

b) Die Funktion g ist nicht stetig in $(0,0)$, denn es gilt

$$g(1/n^2,1/n) = \frac{1/n^4}{1/n^4+1/n^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0 = g(0,0)\,.$$

Sei nun $\varphi \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Im Fall $\cos\varphi = 0$ ist $g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 0 \to 0 = g(0,0)$ für $r \to 0$. Im Fall $\cos\varphi \neq 0$ ergibt sich

$$g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^4\sin^4\varphi} = \frac{r\cos\varphi\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + r^2\sin^4\varphi} \xrightarrow{r\to 0} \frac{0}{\cos^2\varphi+0} = 0 = g(0,0)\,.$$

c) Wegen $h(x,x) = 1 \to 1 \neq 0 = h(0,0)$ für $x \to 0$ ist die Funktion h in $(0,0)$ nicht stetig.

Sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$h(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{y^2}{y^2+(1-y/x)^2} \xrightarrow{y\to 0} \frac{0}{0+1} = 0\,.$$

Folglich existiert $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} h(x,y)) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = h(0,0)$. Wegen $h(x,y) = h(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existiert auch der andere iterierte Limes und hat den gleichen Wert.

Aufgabe 2

Es handelt sich um den Schnitt der Oberfläche der Kugel um $(0,0,0)$ mit Radius 1 und der Ebene $x+z=1$; dies ist ein Kreis. Setzen wir $z=1-x$ in die Kugelgleichung ein, so erhalten wir

$$x^2+y^2+(1-x)^2=1\,, \quad \text{also} \quad 2x^2-2x+y^2=0\,.$$

Wir dividieren durch 2 und nehmen eine quadratische Ergänzung vor:

$$(x-\tfrac{1}{2})^2-(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,y)^2=0\,.$$

Bei dieser Gleichung parametrisieren wir nun wie folgt:

$$x-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}\cos t, \qquad \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,y=\tfrac{1}{2}\sin t \qquad (t\in[0,2\pi]).$$

Dann haben wir $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t$, $y=\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin t$ und es folgt $z=1-x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t$. Also:

$$\gamma(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\cos t\\ \sqrt{2}\,\sin t\\ 1-\cos t\end{pmatrix} \qquad (t\in[0,2\pi]).$$

Der Tangentenvektor im Punkt $\gamma(t)$ lautet $\dot\gamma(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sin t\\ \sqrt{2}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$. Für die Bogenlänge ergibt sich

$$s(t):=\int_0^t\|\dot\gamma(\tau)\|\,d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\sqrt{\sin^2\tau+2\cos^2\tau+\sin^2\tau}\,d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\sqrt{2}\,d\tau=t/\sqrt{2} \qquad (t\in[0,2\pi]),$$

also gilt $L(\gamma)=s(2\pi)=\sqrt{2}\pi$. Wegen $t=t(s)=\sqrt{2}\,s$ ist die Darstellung bezüglich der Bogenlänge (bzw. die natürliche Parametrisierung) gegeben durch

$$\tilde\gamma(s)=\gamma(t(s))=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\cos(\sqrt{2}\,s)\\ \sqrt{2}\,\sin(\sqrt{2}\,s)\\ 1-\cos(\sqrt{2}\,s)\end{pmatrix} \qquad (s\in[0,\sqrt{2}\,\pi]).$$

Aufgabe 3

a) Für $-1<t<1$ gilt

$$\dot\gamma(t)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{1-t^2}\\ 1\\ -t/\sqrt{1-t^2}\end{pmatrix}.$$

Für $t_0\in(-1,1)$ ist daher

$$\gamma(t_0)+\lambda\dot\gamma(t_0)=\begin{pmatrix}\arcsin t_0\\ t_0\\ \sqrt{1-t_0^2}\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1/\sqrt{1-t_0^2}\\ 1\\ -t_0/\sqrt{1-t_0^2}\end{pmatrix}, \qquad \lambda\in\mathbb{R},$$

eine Parameterdarstellung der Tangente im Punkt $\gamma(t_0)$.

b) Für $t\in[-1,1]$ haben wir

$$s(t):=\int_{-1}^t\|\dot\gamma(\tau)\|\,d\tau=\int_{-1}^t\sqrt{\frac{2}{1-\tau^2}}\,d\tau=\sqrt{2}\arcsin\tau\Big|_{\tau=-1}^t=\sqrt{2}\,(\arcsin t+\tfrac{\pi}{2})\,.$$

Folglich hat die Kurve γ die Länge $L(\gamma)=s(1)=\sqrt{2}\,\pi$. Wegen

$$\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{2}=\arcsin t, \qquad \text{also} \qquad t=t(s)=\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,s-\tfrac{\pi}{2})=-\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,s)$$

lautet eine Darstellung von γ bezüglich der Bogenlänge (oder natürliche Parametrisierung)

$$\tilde\gamma(s)=\gamma(t(s))=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s-\frac{\pi}{2}\\ -\cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s)\\ \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s)\end{pmatrix}, \qquad s\in[0,\sqrt{2}\,\pi]\,.$$

Aufgabe 4

a) Die partielle Ableitung von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nach x im Punkt $x^0 = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Richtungsableitung von f in x^0 in Richtung des ersten Einheitsvektors $e_1 = (1,0)$, also

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x^0) &:= \frac{\partial f}{\partial e_1}(x^0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f(x^0+te_1) - f(x^0)\big) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f((x,y)+t(1,0)) - f(x,y)\big)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f(x+t,y) - f(x,y)\big).\end{aligned}$$

Für festes $y \in \mathbb{R}$ ist dies ist gerade der Differenzenquotient der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x,y)$. Um die partielle Ableitung von f nach x zu berechnen, können wir also $f(x,y)$ nach x differenzieren, wobei wir y als eine Konstante betrachten.

Entsprechendes erhalten wir für die partielle Ableitungen nach y.

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 4xy^2 + 4y^3 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4x^2y + 12xy^2 + 4y^3\,.$$

Daraus ergibt sich für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 6x - 4y^2\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -4x^2 + 24xy + 12y^2\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) &= -8xy + 12y^2\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) &= -8xy + 12y^2\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: Dass $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ gilt, war wegen des Satzes von Schwarz schon vorher klar, denn die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist zweimal stetig differenzierbar.

b) Hier haben wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xe^{xy} + (x^2+y^2)ye^{xy} = (x^2y + 2x + y^3)e^{xy}\,,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2ye^{xy} + (x^2+y^2)xe^{xy} = (x^3 + xy^2 + 2y)e^{xy}\,.\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung lauten

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= (2xy+2)e^{xy} + (x^2y + y^3 + 2x)ye^{xy} = (x^2y^2 + 4xy + y^4 + 2)e^{xy}\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= (2xy+2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)xe^{xy} = (x^4 + x^2y^2 + 4xy + 2)e^{xy}\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) &= (3x^2+y^2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)ye^{xy} = (x^3y + 3x^2 + xy^3 + 3y^2)e^{xy}\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}f(x,y)\,.\end{aligned}$$

Nach Definition gilt für die Richtungsableitung von f im Punkt $x^0 = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ in Richtung $v = (v_1, v_2) = (1,1)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(f(x^0+tv) - f(x^0)\Big) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)\Big)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\big((x+tv_1)^2 + (y+tv_2)^2\big)e^{(x+tv_1)(y+tv_2)} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\big(x^2 + 2txv_1 + t^2v_1^2 + y^2 + 2tyv_2 + t^2v_2^2\big)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\big(x^2 + y^2 + 2t(xv_1 + yv_2) + t^2(v_1^2+v_2^2)\big)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big((x^2+y^2)e^{xy}\big(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - 1\big) + 2t(xv_1+yv_2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}\\ &\qquad + t^2(v_1^2+v_2^2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}\Big)\,.\end{aligned}$$

Zur Berechnung von $\frac{1}{t}(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}-1)$ setzen wir $\alpha := yv_1 + xv_2$ und $\beta := v_1v_2$ und betrachten die durch $g(t) := e^{\alpha t+\beta t^2}$ gegebene Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist g differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $g'(t) = (\alpha + 2\beta t)e^{\alpha t+\beta t^2}$. Nun gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}-1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(g(t)-g(0)) = g'(0) = \alpha = yv_1 + xv_2.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) &= (x^2+y^2)e^{xy}(yv_1+xv_2) + 2(xv_1+yv_2)e^{xy}\cdot 1 + 0\\ &= e^{xy}\big((x^2+y^2)(y+x) + 2(x+y)\big)\\ &= e^{xy}(x+y)(x^2+y^2+2).\end{aligned}$$

Die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}$ kann man auch eleganter bestimmen: Da die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ von f stetig sind, ist f nach dem Satz in 19.10 differenzierbar. Deshalb gilt nach dem Satz in 19.9 für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = f'(x,y)\,v &= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}\\ &= e^{xy}\begin{pmatrix}x^2y+2x+y^3 & x^3+xy^2+2y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\\ &= e^{xy}\big(x^2y+2x+y^3+x^3+xy^2+2y\big)\\ &= e^{xy}(x+y)(x^2+y^2+2).\end{aligned}$$

Dies bestätigt unser obiges Ergebnis.

c) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= yz\sin(x+y+z) + xyz\cos(x+y+z)\,,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= xz\sin(x+y+z) + xyz\cos(x+y+z)\,,\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= xy\sin(x+y+z) + xyz\cos(x+y+z)\,.\end{aligned}$$

d) Hier sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^y/z\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xe^y/z\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -xe^y/z^2\,.$$

Weiter haben wir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 0\,,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = xe^y/z\,,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2xe^y/z^3\,.$$

Und schließlich noch die gemischten Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y,z) &= e^y/z = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y,z)\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}(x,y,z) &= -e^y/z^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}(x,y,z)\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}(x,y,z) &= -xe^y/z^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}(x,y,z)\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 5

a) Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Komposition stetiger Funktionen stetig; es bleibt noch der Nullpunkt zu prüfen. Ist $(x,y) \neq (0,0)$ und $z := \max\{|x|,|y|\}$, so gilt

$$|f(x,y)| = \left|\frac{y^3 - x^2y}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{|y^3| + |x^2y|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{z^3+z^3}{z^2} = 2z = 2\max\{|x|,|y|\}\,,$$

und damit folgt $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$.

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$f_x(x,y) = \frac{-2xy(x^2+y^2) - (y^3 - x^2y)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy^3}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

$$f_y(x,y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2+y^2) - (y^3 - x^2y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^4 + 4x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ haben wir also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} -4xy^3 \\ -x^4 + 4x^2y^2 + y^4 \end{pmatrix}.$$

Nun noch zum Nullpunkt: Definitionsgemäß gilt

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

und

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\frac{h^3 - 0}{0 + h^2} = 1\,.$$

Somit ist f auch in $(0,0)$ partiell differenzierbar mit

$$\operatorname{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} f_x(0,0) \\ f_y(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Wegen

$$f_x(x,x) = \frac{-4x^4}{(x^2+x^2)^2} = -1 \xrightarrow{x\to 0} -1 \neq 0 = f_x(0,0)\,,$$

$$f_y(x,0) = \frac{-x^4 + 0 + 0}{(x^2+0)^2} = -1 \xrightarrow{x\to 0} -1 \neq 1 = f_y(0,0)$$

ist weder f_x noch f_y im Punkt $(0,0)$ stetig.

d) Es sei $v = (v_1, v_2) \neq (0,0)$ eine beliebige Richtung. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+hv) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\frac{(hv_2)^3 - (hv_1)^2hv_2}{(hv_1)^2 + (hv_2)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3v_2^3 - h^3v_1^2v_2}{h^3(v_1^2+v_2^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{v_2^3 - v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2} = \frac{v_2^3 - v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2}\,.\end{aligned}$$

Dies soll nun mit

$$(\operatorname{grad} f(0,0))\cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2$$

verglichen werden. Es gilt

$$\frac{v_2^3 - v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2} = v_2 \iff v_2^3 - v_1^2v_2 = v_2(v_1^2+v_2^2) \iff 2v_1^2v_2 = 0\,.$$

Gleichheit gilt also genau dann, wenn $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ ist.

e) Nicht für alle Richtungen v gilt die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\operatorname{grad} f(0,0)) \cdot v$. Folglich kann die Funktion f in $(0,0)$ nicht differenzierbar sein, denn sonst müsste die Gleichung für alle Richtungen gelten. Da die partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig sind, ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig partiell differenzierbar, also auch differenzierbar mit

$$f'(x,y) = \big(\operatorname{grad} f(x,y)\big)^T = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} -4xy^3 & -x^4+4x^2y^2+y^4 \end{pmatrix}.$$