Karlsruhe Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2015
01.06.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die Funktionen f, g und h sind für $(x,y) \neq (0,0)$ durch

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,, \qquad g(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}\,, \qquad h(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

gegeben, und es sei $f(0,0) := g(0,0) := h(0,0) := 0$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig.

b) Die Funktion g ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber g ist im Nullpunkt „längs jeder Geraden stetig“, d.h. für jedes feste $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \to g(0,0)$ für $r \to 0$.

c) Die Funktion h ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} h(x,y)\Big) \qquad \text{und} \qquad \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} h(x,y)\Big)$$

existieren und stimmen mit $h(0,0)$ überein.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Menge aller Punkte $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, die den Gleichungen

$$x^2+y^2+z^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad x+z=1$$

genügen. Geben Sie eine Parametrisierung dieser Menge an und berechnen Sie eine Darstellung bezüglich der Bogenlänge. Bestimmen Sie außerdem in jedem Kurvenpunkt den Tangentenvektor.

Aufgabe 3

Die Kurve $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \arcsin t \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}.$$

a) Sei $t_0 \in (-1,1)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Tangente in $\gamma(t_0)$ an.

b) Berechnen Sie die Länge der Kurve γ und bestimmen Sie die Darstellung von γ bezüglich der Bogenlänge.

— bitte wenden —

Aufgabe 4

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen.

a) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$ **b)** $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{xy}$

c) $f(x,y,z) = xyz\sin(x+y+z)$ **d)** $f(x,y,z) = xe^y/z\,, \quad z \neq 0$

Berechnen Sie in **a)**, **b)** und **d)** auch die partiellen Ableitungen der partiellen Ableitungen. Ermitteln Sie zusätzlich in **b)** die Richtungsableitung von f in Richtung $v = (1,1)$.

Aufgabe 5

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Berechnen Sie in jedem Punkt den Gradienten von f.

c) Sind die partiellen Ableitungen f_x und f_y in $(0,0)$ stetig?

d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ für jede Richtung v, für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\nabla f(0,0)) \cdot v$?

e) Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort f'.