Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2015
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Da die Exponentialfunktion exp und $z \mapsto -z^{-4}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph sind, ist f als Verkettung holomorpher Funktionen auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph, also auch komplex differenzierbar. (Dort sind folglich die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (CRD) erfüllt.) Nach der Kettenregel gilt

$$f'(z) = e^{-1/z^4}(4z^{-5}) = \frac{4e^{-1/z^4}}{z^5} \qquad (z \neq 0)\,.$$

Nun zum Punkt $z_0 = 0$: Die Funktion f ist in 0 nicht einmal stetig, denn

$$f(re^{i\pi/4}) = e^{-e^{-i\pi}/r^4} = e^{1/r^4} \xrightarrow{r \to 0} \infty\,.$$

Folglich ist f in $z_0 = 0$ nicht komplex differenzierbar und damit erst recht nicht holomorph.

b) Die Funktionen $u(x,y) := \sin x \, \sin y$ und $v(x,y) := -\cos x \, \cos y$ sind offensichtlich auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= \cos x \, \sin y\,, \qquad & u_y(x,y) &= \sin x \, \cos y\,, \\ v_x(x,y) &= \sin x \, \cos y\,, \qquad & v_y(x,y) &= \cos x \, \sin y\,. \end{aligned}$$

Wir prüfen die CRD nach: $u_x = v_y$ ist immer erfüllt. $u_y = -v_x$ gilt genau dann, wenn $\sin x \, \cos y = 0$ ist, also wenn $x = k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ oder $y = (m + \frac{1}{2})\pi$ mit einem $m \in \mathbb{Z}$. Genau in diesen Punkten ist f komplex differenzierbar. Da die Menge

$$M := \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \text{ oder } \operatorname{Im} z = (m + \tfrac{1}{2})\pi \text{ für ein } m \in \mathbb{Z} \right\}$$

nicht offen ist, liegt nirgends Holomorphie vor. Für $z = x + iy \in M$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = \cos x \, \sin y + i \underbrace{\sin x \, \cos y}_{=0,\,\text{da}\, z \in M} = \cos x \, \sin y\,.$$

c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(x+iy) = (x+iy)x = x^2 + ixy =: u(x,y) + iv(x,y)$. Die Funktionen $u, v \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind stetig differenzierbar mit

$$u_x(x,y) = 2x\,, \qquad u_y(x,y) = 0\,, \qquad v_x(x,y) = y\,, \qquad v_y(x,y) = x\,.$$

Wegen

$$\begin{aligned} u_x(x,y) = v_y(x,y) \quad &\Longleftrightarrow \quad 2x = x \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0\,, \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 = -y \quad \Longleftrightarrow \quad y = 0 \end{aligned}$$

sind die CRD nur für $(x,y) = (0,0)$ erfüllt. Deshalb liegt nur in $z = 0$ komplexe Differenzierbarkeit vor. Da $\{0\} \subset \mathbb{C}$ nicht offen ist, ist f nirgendwo holomorph.

d) Hier ist $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$. Für $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ gilt

$$f(x+iy)=\frac{x+iy}{x-iy}+\frac{x-iy}{x+iy}=\frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2}+\frac{(x-iy)^2}{x^2+y^2}=\frac{2x^2-2y^2}{x^2+y^2}\,.$$

Wir definieren $u\colon \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $u(x,y)=\frac{2x^2-2y^2}{x^2+y^2}$, sowie $v\colon \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $v(x,y)=0$. Dann erhalten wir für $(x,y)\neq(0,0)$

$$f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)=u(x,y)\,.$$

Offenbar sind u und v auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ stetig differenzierbar; die Quotientenregel liefert

$$u_x(x,y)=\frac{4x(x^2+y^2)-(2x^2-2y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

und genauso

$$u_y(x,y)=\frac{-8x^2y}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

außerdem gilt

$$v_x(x,y)=v_y(x,y)=0\,.$$

Damit sind die CRD genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^2}=0\quad\text{und}\quad\frac{-8x^2y}{(x^2+y^2)^2}=0\,,$$

also wenn $x=0$ oder $y=0$ gilt. Die Funktion f ist somit auf der imaginären und der reellen Achse komplex differenzierbar (natürlich mit Ausnahme des Nullpunktes, wo sie gar nicht definiert ist). Hier lautet die Ableitung

$$f'(x+iy)=u_x(x,y)+iv_x(x,y)=0\,.$$

Da $\{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}:\operatorname{Re}z=0\text{ oder }\operatorname{Im}z=0\}$ nicht offen ist, liegt Holomorphie nirgends vor.

Aufgabe 2

a) Für die gegebene Parametrisierung gilt $\gamma'(t)=-ie^{i(\pi-t)}$, und es ist

$$F(\gamma(t))=\overline{e^{i(\pi-t)}}\big(e^{i(\pi-t)}\big)^2=e^{-i(\pi-t)}e^{2i(\pi-t)}=e^{i(\pi-t)}\,.$$

Nach Definition des (komplexen) Kurvenintegrals ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\int_\gamma F(z)\,dz&=\int_0^{\pi/2}F(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt=\int_0^{\pi/2}e^{i(\pi-t)}(-ie^{i(\pi-t)})\,dt\\&=-ie^{2\pi i}\int_0^{\pi/2}e^{-2it}\,dt=-i\left[\frac{e^{-2it}}{-2i}\right]_{t=0}^{\pi/2}=\frac{e^{-i\pi}-e^0}{2}=\frac{-1-1}{2}=-1\,.\end{aligned}$$

b) Die Kurve γ durchläuft den Rand des Quadrates mit den Ecken 0, 1, $1+i$ und i, setzt sich also zusammen aus den vier Teilkurven

$$\gamma_1(t)=t\,,\qquad\gamma_2(t)=1+it\,,\qquad\gamma_3(t)=1-t+i\,,\qquad\gamma_4(t)=i(1-t)\,,$$

wobei jeweils $t\in[0,1]$ gilt. Somit folgt

$$\begin{aligned}\int_\gamma F(z)\,dz&=\sum_{k=1}^4\int_{\gamma_k}F(z)\,dz=\sum_{k=1}^4\int_0^1F(\gamma_k(t))\gamma_k'(t)\,dt=\sum_{k=1}^4\int_0^1|\gamma_k(t)|^2\gamma_k'(t)\,dt\\&=\int_0^1t^2\,dt+\int_0^1(1+t^2)i\,dt+\int_0^1\big((1-t)^2+1\big)(-1)\,dt+\int_0^1(1-t)^2(-i)\,dt\\&=\int_0^1\Big(t^2-(1-t)^2-1+i\big(1+t^2-(1-t)^2\big)\Big)\,dt=\int_0^1(2t-2+2it)\,dt=-1+i\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig; wir müssen also nur noch die Stetigkeit in $(0,0)$ nachweisen: Wegen

$$\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

gilt $|f(x,y)| \leqslant |xy|$ und damit folgt $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$.

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\,\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{y(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}\,, \end{aligned}$$

und wegen $f(x,y) = -f(y,x)$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-f(y+h,x)+f(y,x)}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{f(y+h,x)-f(y,x)}{h} = -f_x(y,x) = -\frac{y^4x+4y^2x^3-x^5}{(y^2+x^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} x^4y+4x^2y^3-y^5 \\ x^5-4x^3y^2-xy^4 \end{pmatrix}.$$

Für die partiellen Ableitungen von f im Nullpunkt erhalten wir

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

und

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0\,.$$

Somit ist $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$.

c) Es ist

$$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^5-0-0}{(h^2+0)^2} = 1$$

sowie

$$f_{yx}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0+0-h^5}{h(0+h^2)^2} = -1\,.$$

d) Wie wir wissen, gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} x^4y+4x^2y^3-y^5 \\ x^5-4x^3y^2-xy^4 \end{pmatrix}$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dort existieren also die partiellen Ableitungen erster Ordnung und sind stetig, d. h. f ist dort stetig partiell differenzierbar. Aus der Vorlesung wissen wir, dass dies die Differenzierbarkeit von f impliziert. Die Ableitung ist

$$f'(x,y) = \big(\operatorname{grad} f(x,y)\big)^T = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} x^4y+4x^2y^3-y^5 & x^5-4x^3y^2-xy^4 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist bekannt: $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$. Für $(x,y) \neq (0,0)$ sei $z := \max\{|x|,|y|\}$. Es gilt

$$|f_x(x,y)| = \frac{|x^4y + 4x^2y^3 - y^5|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \frac{z^5 + 4z^5 + z^5}{(z^2)^2} = 6z = 6\max\{|x|,|y|\}\,.$$

Damit folgt $f_x(x,y) \to 0 = f_x(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$. Genauso sieht man ein, dass f_y in $(0,0)$ stetig ist. Also ist f in $(0,0)$ stetig partiell differenzierbar und damit differenzierbar, und es gilt $f'(0,0) = (0\ 0)$.

e) Die Funktion f kann nicht zweimal stetig differenzierbar sein, denn sonst müssten f_{yx} und f_{xy} nach dem Satz von Schwarz übereinstimmen, was aber nach **c)** nicht der Fall ist.

Aufgabe 4

Die behauptete Auflösbarkeit folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen, wenn wir

$$f(0,0,-2) = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,-2) \neq 0$$

für die stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3$, überprüft haben. Es gilt $f(0,0,-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 = 0$ und

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + 4z - 3xy\,, \qquad \text{also} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,-2) = 3(-2)^2 + 4(-2) = 4 \neq 0\,,$$

womit die Behauptung bereits bewiesen ist. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} g'(x,y) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\big(x,y,g(x,y)\big)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x,y)}\big(x,y,g(x,y)\big) \\ &= -\frac{1}{3g(x,y)^2 + 4g(x,y) - 3xy}\big(-3yg(x,y) + 3x^2 \quad -3xg(x,y) - 3y^2\big)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Das zweite Taylorpolynom von f in $x^0 = (1,-1,0)$ ist gegeben durch

$$T_{2,x^0}(h) = f(x^0) + \nabla f(x^0)\cdot h + \tfrac{1}{2} h^T H_f(x^0) h\,.$$

Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xe^z - y^2$, ergibt sich

$$f_x(x,y,z) = e^z\,, \qquad f_y(x,y,z) = -2y\,, \qquad f_z(x,y,z) = xe^z\,.$$

Damit erhalten wir $f_x(1,-1,0) = 1$, $f_y(1,-1,0) = 2$ und $f_z(1,-1,0) = 1$. Weiter gilt

$$f_{xx} = 0\,, \quad f_{xy} = 0\,, \quad f_{xz} = e^z\,, \quad f_{yy} = -2\,, \quad f_{yz} = 0\,, \quad f_{zz} = xe^z\,.$$

Insgesamt ergibt sich

$$f(x^0) = 0\,, \qquad \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad H_f(x^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$T_{2,x^0}(h_1,h_2,h_3) = 0 + h_1 + 2h_2 + h_3 + \tfrac{1}{2}\big(-2h_2^2 + h_3^2 + 2h_1h_3\big) = h_1 + 2h_2 + h_3 - h_2^2 + \tfrac{1}{2}h_3^2 + h_1h_3\,.$$

Schreibt man $h = (x,y,z) - x^0 = (x-1, y+1, z)$, so erhält man

$$(x-1) + 2(y+1) + z - (y+1)^2 + \tfrac{1}{2}z^2 + (x-1)z\,.$$

Aufgabe 6

a) Es gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (y+1, x-2) \overset{!}{=} (0,0)$ genau dann, wenn $(x,y) = (2,-1)$ ist. Somit ist $(2,-1)$ der einzige kritische Punkt von f. Wegen $\det H_f(2,-1) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$ ist die Hesse-Matrix $H_f(2,-1)$ indefinit, so dass f in $(2,-1)$ einen Sattelpunkt besitzt.

b) Der Gradient von f lautet $\operatorname{grad} f(x,y) = (6x^2 - 3y, -3x + 6y^2)$. Die erste Komponente ist $= 0$ genau dann, wenn $y = 2x^2$ ist. In diesem Fall ergibt sich für die zweite Komponente $-3x + 24x^4 = 3x(8x^3 - 1)$. Die kritischen Punkte sind also $(0,0)$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$.

Da $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte -3 und 3 besitzt, ist $H_f(0,0)$ indefinit. Deshalb ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt.

Da $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte 3 und 9 besitzt, ist $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ positiv definit. Somit hat f in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein lokales Minimum.

c) Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte von f. Es gilt

$$f_x(x,y) = 2e^{-x^2-y^2} + (2x + 2y + 3)e^{-x^2-y^2}(-2x) = (-4x^2 - 4xy - 6x + 2)e^{-x^2-y^2} .$$

Wegen $f(x,y) = f(y,x)$ ergibt sich daraus $f_y(x,y) = f_x(y,x) = (-4y^2 - 4xy - 6y + 2)e^{-x^2-y^2}$. Kritische Punkte von f sind solche mit $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$, also mit

$$-4x^2 - 4xy - 6x + 2 = 0 \qquad \text{und} \qquad -4y^2 - 4xy - 6y + 2 = 0 . \tag{$*$}$$

Wir ziehen die erste von der zweiten Gleichung ab und erhalten

$$4(x^2 - y^2) + 6(x - y) = 0 , \qquad \text{also} \qquad (x - y)\big(4(x + y) + 6\big) = 0 .$$

Dies ist gleichbedeutend mit $x - y = 0$ oder $4(x + y) + 6 = 0$. Im ersten Fall, also für $x = y$, folgt aus $(*)$ die Gleichung

$$-8x^2 - 6x + 2 = 0 , \qquad \text{also} \qquad x^2 + \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{4} = 0 .$$

Diese hat die zwei Lösungen $x_{1,2} = -\frac{3}{8} \pm (\frac{9}{64} + \frac{1}{4})^{1/2}$, d. h. $x_1 = \frac{1}{4}$ und $x_2 = -1$.

Im zweiten Fall (für $y = -x - \frac{3}{2}$) wird die erste Gleichung in $(*)$ zu

$$-4x^2 - 4x(-x - \tfrac{3}{2}) - 6x + 2 = 0 , \qquad \text{also} \qquad 2 = 0 .$$

Es gibt folglich genau zwei kritische Punkte: $(-1,-1)$ und $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Nur dort können lokale Extrema von f sein, doch ob tatsächlich Extrema vorliegen, müssen wir noch untersuchen. Dazu betrachten wir die Hessematrix von f. Es gilt

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= (-8x - 4y - 6)e^{-x^2-y^2} - 2x(-4x^2 - 4xy - 6x + 2)e^{-x^2-y^2} \\
&= (8x^3 + 8x^2y + 12x^2 - 12x - 4y - 6)e^{-x^2-y^2} , \\
f_{yy}(x,y) &= (8y^3 + 8xy^2 + 12y^2 - 4x - 12y - 6)e^{-x^2-y^2} , \\
f_{xy}(x,y) &= -4xe^{-x^2-y^2} - 2y(-4x^2 - 4xy - 6x + 2)e^{-x^2-y^2} \\
&= (8x^2y + 8xy^2 + 12xy - 4x - 4y)e^{-x^2-y^2} .
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(-1,-1) & f_{xy}(-1,-1) \\ f_{xy}(-1,-1) & f_{yy}(-1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{-2} & 4e^{-2} \\ 4e^{-2} & 6e^{-2} \end{pmatrix} .$$

Wegen $f_{xx}(-1,-1) = 6e^{-2} > 0$ und $\det H_f(-1,-1) = 20e^{-4} > 0$ ist diese Matrix positiv definit. Somit besitzt f im Punkt $(-1,-1)$ ein lokales Minimum. Weiter ist

$$H_f(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}) = \begin{pmatrix} -9e^{-1/8} & -e^{-1/8} \\ -e^{-1/8} & -9e^{-1/8} \end{pmatrix}.$$

Wegen $f_{xx}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = -9e^{-1/8} < 0$ und $\det H_f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = 80e^{-1/4} > 0$ ist diese Matrix negativ definit. Im Punkt $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ hat f daher ein lokales Maximum.