Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2015
11.06.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wo sind sie holomorph? Bestimmen Sie gegebenenfalls f'.

a) $f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$

b) $f(x+iy) = \sin x \, \sin y - i \cos x \, \cos y \quad (x, y \in \mathbb{R})$

c) $f(z) = z \operatorname{Re} z$

d) $f(z) = \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} \quad (\text{für } z \neq 0)$

Aufgabe 2

Berechnen Sie jeweils für die Funktion F und die Kurve γ das Kurvenintegral $\int_\gamma F(z)\,dz$.

a) $F(z) = \overline{z}z^2\,, \quad \gamma(t) = e^{i(\pi - t)}\,,\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$

b) $F(z) = |z|^2\,, \quad \gamma$ sei der positiv orientierte Rand von $\{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in (0,1)\}$

Aufgabe 3

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f(x,y)$ für alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen das möglich ist.

c) Berechnen Sie $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$.

d) Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort f'.

e) Ist f zweimal stetig differenzierbar?

Hinweis: Argumentieren Sie mit dem Satz von Schwarz.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3 = 0$ in einer Umgebung von $(0,0,-2)$ nach z aufgelöst werden kann. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g(x,y)$ die Ableitung $g'(x,y)$.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom von $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xe^z - y^2$, in $x^0 = (1,-1,0)$.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie jeweils alle Stellen lokaler Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

a) $f(x,y) = xy + x - 2y - 2$

b) $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$

c) $f(x,y) = (2x + 2y + 3)e^{-x^2-y^2}$