

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive
 Komplexe Analysis und Integraltransformationen
 Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt**

Aufgabe 1

Schreibe $\vec{g} = f\vec{v}$ mit

$$f(x, y, z) := \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Mit der Produktregel aus 19.21 erhalten wir $\operatorname{rot} \vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \nabla \times (f\vec{v}) = f(\nabla \times \vec{v}) + (\nabla f) \times \vec{v}$.
 Offenbar ist $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$ und $\partial_1 f(x, y, z) = -2x(x^2 + y^2 + z^2)^{-2} + 8x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3}$; die anderen
 partiellen Ableitungen berechnet man genauso und erhält

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{8 - 2(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad (\nabla f) \times \vec{v} = \vec{0}.$$

Folglich ist $\operatorname{rot} \vec{g} = \vec{0}$. Für die Divergenz ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{g} &= \nabla \cdot \vec{g} = \nabla \cdot (f\vec{v}) = f(\nabla \cdot \vec{v}) + (\nabla f) \cdot \vec{v} \\ &= 3f + \frac{8 - 2(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Für $r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi)$ gilt

$$v(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = u(g(r, \varphi)) = u \circ g(r, \varphi)$$

mit $g: (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Anwendung der Kettenregel ergibt

$$v'(r, \varphi) = u'(g(r, \varphi)) \cdot g'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} u_x(g(r, \varphi)) & u_y(g(r, \varphi)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Mit $v'(r, \varphi) =: (v_r(r, \varphi) \quad v_\varphi(r, \varphi))$ erhält man für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} v_r(r, \varphi) &= \cos \varphi u_x(r \cos \varphi, r \sin \varphi) + \sin \varphi u_y(r \cos \varphi, r \sin \varphi), \\ v_\varphi(r, \varphi) &= -r \sin \varphi u_x(r \cos \varphi, r \sin \varphi) + r \cos \varphi u_y(r \cos \varphi, r \sin \varphi). \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} v_{rr}(r, \varphi) &= \cos \varphi (u_{xx}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cos \varphi + u_{yx}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sin \varphi) \\ &\quad + \sin \varphi (u_{xy}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cos \varphi + u_{yy}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sin \varphi) \\ &= \cos^2 \varphi u_{xx}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) + 2 \sin \varphi \cos \varphi u_{xy}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) + \sin^2 \varphi u_{yy}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 v_{\varphi\varphi}(r, \varphi) &= -r \cos \varphi u_x(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \\
 &\quad - r \sin \varphi (u_{xx}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) (-r \sin \varphi) + u_{yx}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \cos \varphi) \\
 &\quad - r \sin \varphi u_y(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \\
 &\quad + r \cos \varphi (u_{xy}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) (-r \sin \varphi) + u_{yy}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \cos \varphi) \\
 &= -r \cos \varphi u_x(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - r \sin \varphi u_y(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \\
 &\quad + r^2 \sin^2 \varphi u_{xx}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - 2r^2 \sin \varphi \cos \varphi u_{xy}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \\
 &\quad + r^2 \cos^2 \varphi u_{yy}(r \cos \varphi, r \sin \varphi).
 \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(r, \varphi) &= v_{rr}(r, \varphi) + \frac{1}{r} v_r(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi}(r, \varphi) \\
 &= (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) (u_{xx}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) + u_{yy}(r \cos \varphi, r \sin \varphi)) \\
 &= u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = \Delta u(x, y)
 \end{aligned}$$

mit $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$.

Aufgabe 3

a) Mit $\dot{\gamma}(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$ ergibt sich für jedes $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}
 \|\dot{\gamma}(t)\| &= \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} \\
 &= \sqrt{\cos^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + 1} = \sqrt{2 + t^2}.
 \end{aligned}$$

Nach Definition des Kurvenintegrals ist dann

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f ds &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} (2t - \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t}) \sqrt{2 + t^2} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} t \sqrt{2 + t^2} dt = \left[\frac{1}{3} (2 + t^2)^{3/2} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3} ((2 + 4\pi^2)^{3/2} - 2^{3/2}) \\
 &= \frac{2}{3} \sqrt{2} ((1 + 2\pi^2)^{3/2} - 1).
 \end{aligned}$$

b) i) Definitionsgemäß ist

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} e^{\cos t} \\ \cos t \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (-e^{\cos t} \sin t + \sin t \cos^2 t) dt = [e^{\cos t} - \frac{1}{3} \cos^3 t]_0^{2\pi} = 0.
 \end{aligned}$$

ii) Auch hier benutzen wir die Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{\ln 2} \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^{\ln 2} \begin{pmatrix} \cosh t \\ -\sinh t \\ \sinh t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix} dt \\
 &= \int_0^{\ln 2} (\cosh^2 t - \sinh^2 t + \sinh t \cosh t) dt = \int_0^{\ln 2} (1 + \sinh t \cosh t) dt \\
 &= \ln 2 + \left[\frac{1}{2} \sinh^2 t \right]_0^{\ln 2} = \ln 2 + \frac{1}{2} \sinh^2(\ln 2) = \ln 2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) \right)^2 = \ln 2 + \frac{9}{32}.
 \end{aligned}$$

- iii) Die Kurven $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (t, 0)$, und $\gamma_2: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = (1, t - 1)$, sind regulär und es gilt $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Somit liegt die Situation aus Bemerkung 20.1 (d) vor:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\gamma_1(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t) dt + \int_1^2 \vec{v}(\gamma_2(t)) \cdot \dot{\gamma}_2(t) dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_1^2 \begin{pmatrix} \sin 1 \\ 1 + (t-1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \sin t dt + \int_1^2 (1 + (t-1)^2) dt \\ &= [-\cos t]_0^1 + [t + \frac{1}{3}(t-1)^3]_1^2 = (-\cos 1 + 1) + (2 + \frac{1}{3} - 1) = \frac{7}{3} - \cos 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

- a) Die Funktionen sind stetig differenzierbar und auf ganz \mathbb{R}^3 definiert. Da \mathbb{R}^3 einfach zusammenhängend ist, gilt: Es handelt sich genau dann um ein Potentialfeld, wenn die Verträglichkeitsbedingung aus Satz 2 in 20.4 erfüllt ist. (Im \mathbb{R}^3 ist dies äquivalent dazu, dass die Rotation verschwindet.) Schreibe $\vec{v} =: (v_1, v_2, v_3)$. Wegen

$$\partial_2 v_3(x, y, z) = 2y + 3z^2 x^2, \quad \partial_3 v_2(x, y, z) = 3z^2 x^2 \neq \partial_y v_3(x, y, z)$$

ist \vec{v} kein Potentialfeld, d. h. es gibt kein C^1 -Skalarfeld $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \nabla f$.

Für $\vec{w} =: (w_1, w_2, w_3)$ hingegen gilt

$$\partial_2 w_3 = e^z = \partial_3 w_2, \quad \partial_3 w_1 = 2z = \partial_1 w_3, \quad \partial_1 w_2 = 0 = \partial_2 w_1.$$

Somit ist \vec{w} ein Potentialfeld, besitzt also ein Potential $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Für dieses Potential muss $\partial_x f(x, y, z) = z^2$ gelten. Integrieren bezüglich x liefert: Es ist

$$f(x, y, z) = z^2 x + c(y, z)$$

mit einer gewissen Funktion $c: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. (Die „Integrationskonstante“ kann also noch von y und z abhängen.) Es folgt $\partial_y f(x, y, z) = \partial_y c(y, z)$, und dies soll $= e^z$ sein. Daher haben wir $c(y, z) = ye^z + d(z)$ mit einer gewissen Funktion $d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir wissen also

$$f(x, y, z) = z^2 x + ye^z + d(z),$$

und hieraus folgt $\partial_z f(x, y, z) = 2zx + ye^z + d'(z)$. Damit dies gleich der dritten Komponente von \vec{w} wird, muss $d' = 0$ gelten. Wir wählen $d = 0$ und haben ein Potential von \vec{w} :

$$f(x, y, z) = z^2 x + ye^z.$$

- b) Bei \vec{v} müssen wir das Kurvenintegral nach Definition ausrechnen:

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = [-\frac{1}{3}t^3 + t^2]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Bei \vec{w} dagegen können wir auf das oben berechnete Potential f zurückgreifen:

$$\int_{\gamma} \vec{w} \cdot d\vec{s} = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(0, 1, 0) - f(1, 0, 0) = 1 - 0 = 1.$$